XV Edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Mayo 2018

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Directorio 2018
Presidente: Diego Recalde
Vicepresidenta: Andrea Moreira
Secretario: Pedro Merino
Tesorero: Miguel Yangari
Vocales principales: Juan Carlos De los Reyes, Juan Carlos Trujillo, David Hervas, Luis Miguel Torres.
Vocales suplentes: Eduardo Alba, Andrés Merino, Sergio González, Paula Castro.

Comisiones para la elaboración de las pruebas de la XV edición de la Olimpiada Matemática
Coordinador General: Miguel Yangari.
Categoría infantil, niveles 1 y 2: Ramiro Torres (coordinador), Sandra Gutiérrez, Fernanda Salazar.
Categoría juvenil, nivel 1: David Hervas (coordinador), Antonio Nicola Di Teodoro, John Skukalek.
Categoría juvenil, nivel 2: Eduardo Alba (coordinador), Antonio Nicola Di Teodoro, Israel Cevallos.
Categoría juvenil, nivel 3: Andrés Merino (coordinador), David Pazmiño, Jonathan Ortiz, Cristian Guachamín.

Sedes de la XV edición de la Olimpiada Matemática
Quito
Escuela Politécnica Nacional (Categoría Infantil). Coordinador: Diego Recalde.
Universidad San Francisco de Quito (Categoría Juvenil). Coordinadora: Andrea Moreira.

Ambato
Universidad Técnica de Ambato. Coordinador: Federico Zertuche

Cuenca
Universidad de Cuenca. Coordinadora: Kateryn Herrera.

Guayaquil
Academia de Ciencias Exactas APOL. Coordinadora: Alexandra Enríquez.

Machala
Unidad Educativa Particular del Pacífico. Coordinador: Nicolás Cabrera.

Loja
Universidad Técnica Particular de Loja. Coordinador: Pedro Merino.

Página web de la SEdeM
Victoria Novillo

Desarrollo del sistema web de la SEdeM
Leandro García

Asistencia administrativa
Myrian Guanoluiza

Instituciones auspiciantes
Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad Técnica de Ambato, Universidad Técnica Particular de Loja, Universidad de Cuenca, Proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Academia de Ciencias APOL y Olimpiada Matemática Ecuatoriana.

Colaboradores en las sedes

Quito (EPN): Luis Miguel Torres, Juan Carlos De los Reyes, Sergio González, Miguel Yangari, Polo Vaca, Sofía López, Andrés Miniguano, Cristian Guachamín, Santiago Vela, Daniel Naranjo, Michelle Molina, Leonardo Montoya, Eduardo Arias, Alexandra Maigua, Jason Albarracín, Jonathan Rivera, Erika Galindes, Paúl Real, Erika Ludeña.
Quito (USFQ): Carlos Jiménez, Julio Ortega, Paola Castillo, Andrea Ayala, Diego Ochoa, Israel Cevallos, Juan Esteban Diaz, Julio Ibarra, Katia Bolaños, Luis Espin, Oihane Fernandez, Pablo Burneo, Paula Salazar, Ricardo Lopez, Svetlana Arbakova, Teresa Matos, Vladimir Rodriguez, Patricio Valencia, Kevin Rojas, Alejandra Guzmán, Roberto Ávalos, Lucía Moya, Nicolás Coloma.
Ambato: Wladimir Banda, Helga Dènes.
Cuenca: Eulalia Calle, Xavier González, Paola Urgilés, Ángel Piedra.
Guayaquil: Rubén Villacís, Vicente Torres.
Machala: Paola Ulloa.
Loja: Luis Cuenca.

Edición de esta compilación: Juan Carlos Trujillo y Diego Recalde

Edición de las pruebas de las Olimpiadas: Juan Carlos Trujillo

Preparación del documento en LaTeX: Juan Carlos Trujillo

Diseño de la portada: Julio Erazo

Primer tiraje: 200 ejemplares.

Junio 2018

Índice general

Presentación

La Sociedad Ecuatoriana de Matemática (SEdeM) es la representante oficial del Ecuador ante la Unión Matemática Internacional (IMU, por sus siglas en Inglés). Lograr que Ecuador sea miembro de la IMU, con la SEdeM como institución adherente y responsable de la aplicación, no fue tarea fácil. La IMU establece criterios muy rigurosos para aceptar a un país como miembro pleno, entre los cuales está la productividad científica, el reconocimiento internacional de sus matemáticos, la organización y apoyo sostenido de eventos académicos: congresos, conferencias, workshops, olimpiadas de matemática. Luego de un largo proceso de posicionamiento de alrededor de 10 años y el envío de una exhaustiva documentación, en junio de 2014, luego de un proceso de votación electrónica de todos los países miembros de la unión, Ecuador fue aceptado como miembro pleno de la IMU. Este hecho fue, verdaderamente, un hito para la matemática ecuatoriana.

En este contexto, quiero resaltar la importancia que tiene para nuestra sociedad la organización de la Olimpiada Matemática. En esta, su XV edición, tenemos el orgullo de batir un récord en el número de participantes: 833 niños y jóvenes de 50 planteles educativos a nivel nacional, en nuestras sedes de Quito, Ambato, Cuenca, Guayaquil, Machala y Loja. Este resultado nos reconforta y es el reflejo del esfuerzo cotidiano de todos los miembros de la SEdeM que colaboran para que esta fiesta de la matemática se lleve a cabo con éxito.

Por otro lado, quiero agradecer a quienes hicieron posible esta Olimpiada Matemática: las instituciones auspiciantes y sedes del evento, las diferentes comisiones conformadas por miembros de la SEdeM, los voluntarios, los colegios y sus autoridades, maestros representantes y padres de los niños y jóvenes participantes.

Finalmente, mi sincera felicitación a los niños y jóvenes participantes y miembros del cuadro de honor. Cada año renovamos el compromiso de elaborar nuevos ejercicios creativos e interesantes que despierten o acrecenten su gusto por esta ciencia que, tanto a ustedes como a nosotros, nos apasiona.

Diego Recalde
Presidente de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Cuadro de honor de la XV Edición

Primer Nivel Infantil

ORO	Carpio Carrillo Guillermo COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
PLATA	Laso Villavicencio Amelia COLEGIO AMERICANO DE QUITO
BRONCE	Landívar Pinto Lucía UNIDAD EDUCATIVA SAN FRANCISCO DE SALES
BRONCE	Donoso Cárdenas José Ignacio COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING - QUITO
Mención honorífica	Valdivieso Jarrín Ana Lucía COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Gallegos Ortega Alberto Nicolás COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Jaramillo Altamirano José María COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
Mención honorífica	Paz Montero Juan Andrés ESCUELA DE EDUCACION BASICA PARTICULAR ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
Mención honorífica	Cuesta Arias Analía UNIDAD EDUCATIVA ATENAS - AMBATO
Mención honorífica	Bedón Jácome Maximiliano Ariel UNIDAD EDUCATIVA PÉREZ PALLARES

Segundo Nivel Infantil

ORO	Llorca Rosero Matías UNIDAD EDUCATIVA HONTANAR
PLATA	Herrera Hidalgo José Daniel COLEGIO CATÓLIGO JOSÉ ENGLING
PLATA	Miño Plaza Jorge Patricio FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO
BRONCE	Marañón Kirk Mateo Daniel COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Suasti Bonilla Paula COLEGIO ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	Miño Armijos Jorge Adel ESCUELA DE EDUCACION BASICA PARTICULAR ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
Mención honorífica	Alvarado Chauvín Diego Gabriel ESCUELA DE EDUCACION BASICA PARTICULAR ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
Mención honorífica	Vallejo Tobar Amalia Elisa FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO
Mención honorífica	Feijoó Espinosa Emilio Alessandro FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO
Mención honorífica	Suárez Herrera Marthina Rafaella UNIDAD EDUCATIVA SAN FRANCISCO DE SALES

PRIMER NIVEL JUVENIL

ORO	Campuzano Ruilova Marisol FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO
ORO	Jácome Tobías UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR DESPERTAR
ORO	Palacios Cabrera Daniela Elizabeth UNIDAD EDUCATIVA PRINCIPITO Y MARCEL LANIADO DE WIND - MACHALA
PLATA	Grijalva Andrade Gabriel Isaac UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
PLATA	Jiménez Villacís Daniel Alejandro FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO
BRONCE	Maldonado Fuster Diego Mateo UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
BRONCE	Montero Torres Martín Esteban UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
BRONCE	Escobar Verdezoto Gabriela Marisol ISM INTERNATIONAL ACADEMY - QUITO
Mención honorífica	Páez Ramos Danilo Nicolás CENTRO EDUCATIVO ISAAC NEWTON CIA. LTDA. - QUITO
Mención honorífica	Miranda Toro Pablo Adrián UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
Mención honorífica	Flores Burbano Isaac Sebastián UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
Mención honorífica	Morales Toledo Matías Julián UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
Mención honorífica	Granja Sosa Juan Sebastián FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO
Mención honorífica	Cisneros Miño Andrés Emilio UNIDAD EDUCATIVA ATENAS - AMBATO
Mención honorífica	Moreno Pérez Miguel Ángel UNIDAD EDUCATIVA FISCOMISIONAL PEDRO LUIS CALERO - QUITO
Mención honorífica	Zhuo Hong Adriana Rong UNIDAD EDUCATIVA PRINCIPITO Y MARCEL LANIADO DE WIND - MACHALA

Segundo Nivel Juvenil

ORO	Castillo Flores José Gabriel UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO - CUENCA
PLATA	Jarrín Felipe COLEGIO INTERNACIONAL SEK LOS VALLES - QUITO
PLATA	Enríquez Lía COLEGIO INTERNACIONAL SEK LOS VALLES - QUITO
PLATA	Yu Chen Giácomo COLEGIO MASCULINO ESPÍRITU SANTO - GUAYAQUIL
BRONCE	Oña Chuquimarca Gabriel Esteban UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR BILINGÜE MARTIM CERERÉ - QUITO
BRONCE	Espinoza Castro Juan Steven UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO - CUENCA
Mención honorífica	Wu Yuan Zhiron Cristina INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
Mención honorífica	Porras Dávila Juan Pablo UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
Mención honorífica	Viche Castillo Julio Enrique EDUCATIVA EDUCATIVA PARTICULAR DEL PACÍFICO - MACHALA

Tercer Nivel Juvenil

ORO	Guzmán Jijón Esteban Nicolás COLEGIO AMERICANO DE QUITO
ORO	Vásconez Núñez Adrián Camilo COLEGIO ALBERTO EINSTEIN - QUITO
PLATA	Zambrano López Leonardo Emanuel INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
BRONCE	Chen Yifan INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
BRONCE	Sánchez Calderón Nicolás Alejandro UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO
Mención honorífica	Peña Tauber Andrés COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
Mención honorífica	Barco Santana Valeria Estefanía INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
Mención honorífica	Peng Yu UNIDAD EDUCATIVA AMERICANO DE GUAYAQUIL
Mención honorífica	Aguilera Hidalgo Guillermo Ricardo UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE ÇOMPUTER WORLD QUITO
Mención honorífica	Carrillo Vega Ángel Adrián UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR DEL PACÍFICO - MACHALA

Pruebas de la XV Olimpiadas

PRIMER NIVEL INFANTIL

Preguntas y soluciones

1. **Imagina que tú tienes** 100 **dólares y que tienes cuatro hermanos, cada uno de los cuales tiene** 210 **dólares. ¿Cuántos dólares deberían entregarte cada uno de tus hermanos para que todos, incluido tú, tengan la misma cantidad de dinero?**

   Solución. Cada uno de tus hermanos tiene 210 dólares; por tanto, entre los cuatro tienen

   $$4 \cdot 210 = 840$$

   dólares. Y como tú tienes 100 dólares, entre tú y tus hermanos reúnen

   $$100 + 840 = 940$$

   dólares.
   Como son 5 personas (tú y tus cuatro hermanos), la cantidad igual para cada uno de esos 940 dólares es

   $$\frac{940}{5} = 188$$

   dólares. Esta es la cantidad de dinero que tú deberías tener; pero solo dispones de 100 dólares; luego, tus hermanos deberían entregarte

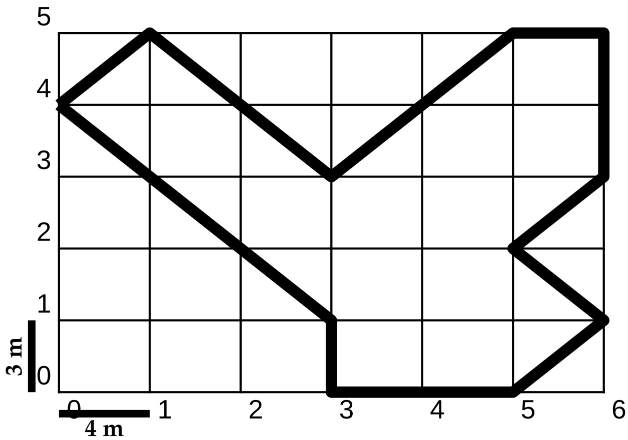
   $$188 - 100 = 88$$

   dólares. Si así lo hicieran, cada uno debería darte

   $$\frac{88}{4} = 22$$

   dólares. □

2. **Tu padre posee un terrero en forma de polígono irregular, como el que se muestra en la figura:**



Determina el costo total que tu padre deberá pagar por cercar el terreno y por construir la casa allí si se sabe que cada metro de cerca cuesta 10 **dólares y cada metro cuadrado de construcción cuesta** 150 **dólares (supón que la construcción de la casa se hará sobre todo el terreno).**

Solución. Para calcular el costo de la cerca, debemos calcular el perímetro del terreno. Para ello, observa que los lados del terreno están "formados" por lados de los cuadrados de la cuadrícula o por diagonales. Los lados miden 3 o 4 centímetros. La longitud de las diagonales pueden calcularse mediante el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

El perímetro tiene 11 diagonales; luego la longitud de todas estas es

$$11 \times 5 = 55$$

metros.
En el perímetro hay 3 lados de 3 metros y 3 de 4 metros; así las longitudes de estos lados es

$$3 \cdot (3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21$$

metros.
Por tanto, el perímetro es igual a

$$55 + 21 = 76$$

metros. Y, puesto que cada metro de cerca tiene un costo de 10 dólares, el padre deberá pagar

$$76 \cdot 10 = 760$$

dólares por la cerca del terreno.
Averigüemos ahora el costo de la construcción; para ello, debemos calcular el área del terreno. Este está conformado por rectángulos completos y por triángulos rectángulos. El área de cada uno de los primeros es

$$3 \cdot 4 = 12$$

metros cuadrados; de cada uno de los segundos es

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

metros cuadrados. Ahora contemos cuántos hay de cada uno de estos en el terreno: 11 rectángulos y 11 triángulos. Por tanto, el área del terreno es:

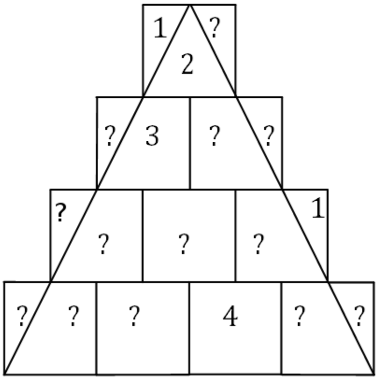
$$11 \cdot (12 + 6) = 11 \cdot 18 = 198$$

metros cuadrados. Luego, el costo de la construcción es

$$198 \cdot 150 = 29\,700$$

dólares. □

3. **Un estudioso de los antiguos egipcios encontró una puerta secreta en una de las pirámides. Esta puerta estaba construida con cuadrados cuyos lados medían 2 metros. Para que la puerta se abra, debe estar revelado un número sobre cada cuadrado. El estudioso logró descifrar algunos de los números, pero aún le faltan algunos. Ayúdale a encontrar los que faltan para que la puerta pueda ser abierta.**



Solución. Los números sobre los cuadrados parecen indicar el área de las regiones obtenidas por los lados del triángulo grande. Como el lado de cada cuadrado mide 2 metros, el área de cada cuadrado es 4 metros cuadrados. Los triángulos obtenidos son rectángulos; uno de los catetos mide 2 metros y el otro 1; entonces el área de cada triángulo es

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

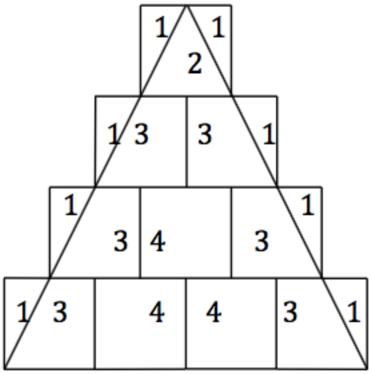
metro cuadrado.

La otra figura que se forma es un trapecio; este trapecio puede ser visto como la "unión" de un rectángulo (la mitad del cuadrado) y un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2. Por tanto, el trapecio es "el cuadrado menos el triángulo rectángulo"; así, el área de este trapecio será

$$4 - 1 = 3$$

metros cuadrados.

Con esta información ya puedes descifrar los números faltantes:



□

4. **Imagina que tienes 28 piezas de lego. Los $2/7$ de las piezas son de color rojo; de las restantes, hay 4 de color gris e igual número de piezas de color verde y de color amarillo. ¿Cuántas piezas hay de cada color?**

Solución. Los $2/7$ de 28 piezas es

$$\frac{2}{7} \cdot 28 = 2 \cdot 4 = 8.$$

Esto significa que de las 28 piezas de lego, 8 son de color rojo. Las restantes

$$28 - 8 = 20,$$

4 son de color gris.
Por tanto,

$$20 - 4 = 16$$

piezas son de color verde y amarillo; y, como de estas dos hay igual número, de estos dos colores hay

$$\frac{16}{2} = 8.$$

En resumen,

> 8 piezas son de color rojo, 4 de color gris, 8 de color amarillo y 8 de color verde. □

5. **Mario y Juan llevaban hojas de papel mientras caminaban a su clase. En el camino, chocaron entre sí y las hojas de cada uno cayeron al piso. Juan tenía 21 hojas y Mario un número par, exactamente igual a los dos tercios de las hojas que Juan tenía. Con el viento se perdieron 7 papeles. Juan puede llegar a la clase con un faltante máximo del $1/7$ de papeles que transportaba. El número de papeles que Mario debe transportar hasta su clase debe ser un múltiplo de 7. Encuentra una repartición de los papeles que cada joven llevaba de manera que se satisfagan las condiciones impuestas a Mario y a Juan.**

Solución. Dado que Juan llevaba 21 papeles, Mario transportaba

$$\frac{2}{3} \cdot 21 = 2 \cdot 7 = 14$$

papeles. Luego, juntos transportaban 35 papeles.
Al chocar se perdieron 7 papeles; por tanto, de los

$$21 + 14 = 35$$

papeles, quedan

$$35 - 7 = 28$$

papeles.
Luego, las posibles reparticiones son las siguientes:

Posible faltante de Juan	Juan queda con	Mario queda con
0	21	7
1	20	8
2	19	9
3	18	10

Por tanto, sí es posible satisfacer las condiciones de ambos cuando el faltante para Juan es cero. □

SEGUNDO NIVEL INFANTIL

Preguntas y soluciones

1. **Se tiene una frase compuesta por tres palabras con dos espacios. Una rana salta sobre las letras y espacios ubicados en las posiciones impares y luego, desde el final, salta sobre las letras y espacios ubicados en las posiciones pares. El orden en el que la rana visitó las letras y espacios es el siguiente:**

   `S C E A _ E M T M T C A I Á E A _ D D D I O`

   Encuentre la frase original.

_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

   Solución. Este es el orden de saltos de la rana:

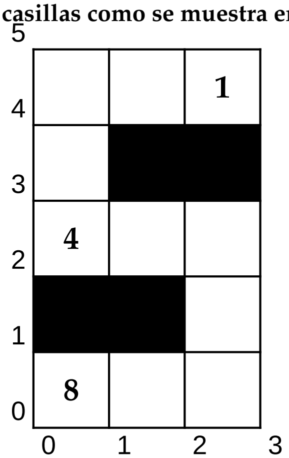
S	C	E	A	_	E	M	T	M	T	C	A	I	Á	E	A	_	D	D	D	I	O
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2

   Ahora ordena las letras en forma ascendente:

S	O	C	I	E	D	A	D	_	D	E	_	M	A	T	E	M	Á	T	I	C	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

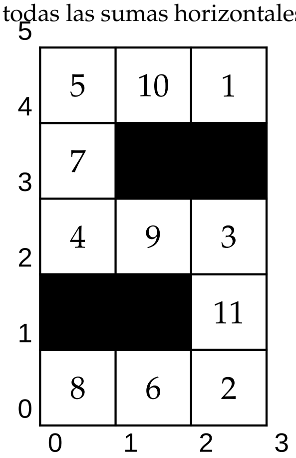
   La frase es: SOCIEDAD DE MATEMÁTICA. □

2. **La letra S es dividida es** 11 **casillas como se muestra en la figura.**



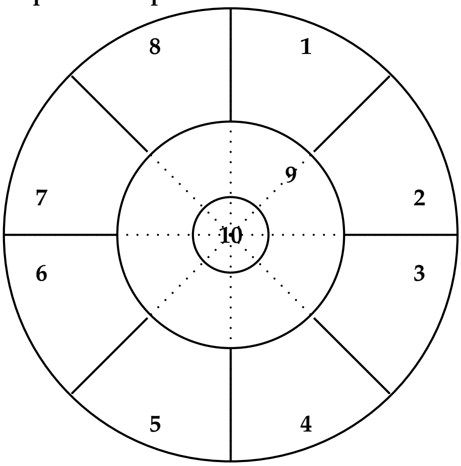
Rellena todas las casillas con números del 1 al 11 (sin repeticiones) de modo que los números de tres casillas consecutivas, tanto horizontalmente como verticalmente, de la letra S, sumen 16.

Solución. Observemos que todas las sumas horizontales y verticales dan 16:



□

3. **En el patio de una escuela se va a trazar una rayuela usando una cinta de color verde. Para ahorrar pintura, se pintarán únicamente las casillas pares. La rayuela tiene** 10 **casillas y está formada por** 3 **círculos concéntricos, como se muestra en la figura. En esta rayuela, se puede pisar con dos pies únicamente en la casilla número** 10**. ¿Cuántos metros de cinta verde se necesitan para trazar la rayuela si el segundo círculo tiene un radio de** 1 **metro, el radio del círculo menor es la mitad del radio del segundo círculo y el radio del círculo externo es el doble del radio del segundo? ¿Cuál es el área que se va a pintar?**



Solución. En primer lugar, para determinar la cantidad de cinta que se requiere, hay que calcular las longitudes de las tres circunferencias y las 8 líneas que dividen los espacios de la rayuela. Para ello, recordemos que

la longitud de una circunferencia es igual a dos veces su radio r por π.

Por tanto, la suma de las longitudes de las circunferencias, cuyos radios son 2, 1 y $\frac{1}{2}$, respectivamente, es:

$$2 \cdot 2 \cdot \pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = 2\pi \left(\frac{1}{2} + 1 + 2 \right) = 7\pi.$$

Ahora calculemos las longitudes de as líneas divisorias; para ello, se debe notar que cada una de ellas son parte de radios del círculo externo; luego su longitud es igual a la diferencia del radio del círculo externo y el intermedio:

$$2 - 1 = 1$$

metros. Como son 8 líneas, se requerirán 8 metros de cinta más 7π:

$$L + l = 7\pi + 8$$

metros de cinta.
En segundo lugar, calculemos el área de las regiones que deben pintarse. En primer lugar, las regiones pares de 1 a 8 son la mitad de todas las regiones. El área de todas esas regiones es

la diferencia del área del círculo externo y el área del círculo de la mitad.

Puesto que

el área de un círculo es igual al producto de π y el cuadrado del radio,

el área de las regiones pares entre 1 y 8 es igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 \right) = \frac{3}{2}\pi$$

metros cuadrados.
Finalmente, también hay que comprar pintura para la zona 10, que es un círculo cuyo radio es $\frac{1}{2}$; por tanto, su área es

$$\pi \cdot \frac{1}{4}$$

metros cuadrados; luego, el área total que va a ser pintada es

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

metros cuadrados. □

4. **Los números de teléfono no celular en Ecuador tienen 7 dígitos. Gabriel tiene que llamar a su casa pero ha olvidado tres de los dígitos del número.**

   4 ? 5 8 ? ? 3

   Las llamadas desde una cabina telefónica tienen un costo de 25 centavos de dólar. El plan de Gabriel es llamar a los números que podrían obtenerse a partir del número incompleto de su casa. ¿Cuánto dinero requerirá el muchacho si obtuviera el número de su casa en el último intento de todos los posibles?

   Solución. Sabemos que los números que pueden llenar los espacios olvidados son los diez dígitos: del cero al nueve. Cada uno de los dígitos olvidados, podría ser uno de esos diez. Como los dígitos pueden repetirse, para cada dígito olvidado, hay 10 posibilidades; luego, hay un total de

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

posibilidades; luego, Gabriel haría mil llamadas antes de conseguir el número correcto. Por tanto, necesitaría $1000 \times 0{,}25 = 250$ dólares. □

5. **La longitud de una cierta ruta por carreteras entre Quito y Guayaquil es de** 450 **kilómetros. Carlos salió desde Quito rumbo a Guayaquil a las 10 de la mañana. Condujo su auto a una velocidad promedio de** 60 **kilómetros por hora durante las dos primeras horas con** 45 **minutos. Las siguientes tres horas condujo su auto a una velocidad promedio de** 80 **kilómetros por hora y, a partir de ese momento hasta llegar a Guayaquil, la velocidad promedio fue de** 50 **kilómetros por hora. ¿A qué hora llegó Carlos a Guayaquil?**

   Solución. El viaje inició a las 10 de la mañana, con una velocidad de 60 kilómetros por hora durante las primeras dos horas con 45 minutos; por tanto, a las 12 horas con 45 minutos, Carlos recorrió 165 kilómetros, pues los 45 minutos representa $\frac{3}{4}$ de hora; luego,

   $$\left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot 60 = \frac{11}{4} \cdot 60 = 165$$

   kilómetros.
   A partir de las 12 horas con 45 minutos, Carlos recorre durante 3 horas con una velocidad de 80 kilómetros por hora; así, en esas tres horas recorre

   $$3 \cdot 80 = 240$$

   kilómetros. Es decir, hasta las tres de la tarde con 45 minutos, ha recorrido

   $$165 + 240 = 405$$

   kilómetros. A esa hora, Carlos está a 45 kilómetros de su destino final, los que deberá recorrer a una velocidad de 50 kilómetros por hora; por tanto, recorrer esa distancia a esa velocidad le tomará

   $$\frac{45}{50} = \frac{9}{10}$$

   de hora; es decir, le tomará

   $$\frac{9}{10} \times 60 = 54$$

   minutos llegar a Guayaquil, a partir de las 3 de la tarde con 45 minutos; es decir, llegará a las 4 de la tarde con 39 minutos. □

Primer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. **Una barra de chocolate se divide entre Andrea, Mateo y Eduardo. Si Andrea tiene $\frac{2}{5}$ de la barra, Mateo $\frac{1}{4}$ y Eduardo** 70 **gramos , ¿cuál es el peso en gramos de la barra de chocolate?**

   Solución. Entre Andrea y Mateo tienen

   $$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8+5}{20}=\frac{13}{20}$$

   de la barra de chocolate.
   Eduardo tiene el resto de la barra; eso significa que él tiene

   $$1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$$

   de la barra de chocolate. Y, como sabemos que él tiene 70 gramos, los $\frac{7}{20}$ de la barra se corresponden a estos 70 gramos; luego, si p es el peso de la barra completa, tenemos que

   $$70=\frac{7}{20}c,$$

   de donde obtenemos

   $$c=70\cdot\frac{20}{7}=200;$$

   es decir, la barra pesa 200 gramos. □

2. **Supón que el número a es distinto de** 3 **(**$a \neq 3$**) y que es solución de la ecuación**

   $$x^2-x-6=0.$$

   Prueba que este número a es también solución de la ecuación

   $$x^3+2x^2+x+2=0.$$

   Solución. En primer lugar, podemos saber "quién" es el número a si resolvemos la ecuación

   $$x^2-x-6=0.$$

   Esto es fácil, porque las soluciones de esta ecuación son dos números cuya suma es igual a 1 (el inverso aditivo del coeficiente de x) y cuyo producto es igual a -6 (el término independiente). Y es también fácil ver que los dos números son el 3 y el -2, pues

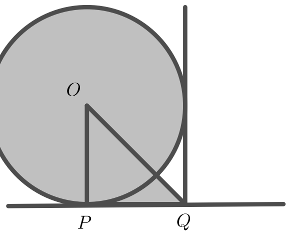
$$3 - 2 = 1 \quad \text{y} \quad (3)(-2) = -6.$$

Luego, las dos raíces de esta ecuación son 3 y -2. Y, como $a \neq 3$, necesariamente tenemos que $a = -2$.
Ahora, podemos ver que

$$\begin{aligned} a^3 + 2a^2 + a + 2 &= (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 \\ &= -8 + 8 - 2 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que -2 es solución de la ecuación $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$. $\square$

3. **En la figura**



el radio del círculo mide 8 **centímetros y el área del triángulo** $\triangle OPQ$ **es igual a** 32 **centímetros cuadrados. Halla el área sombreada.**

Solución. En primer lugar, observa que el triángulo $\triangle OPQ$ y, por tanto, el lado $\overline{OP}$ puede ser visto como la altura del triángulo con respecto a la “base” $\overline{PQ}$. Luego, como el área del triángulo es igual a 32 centímetros cuadrados y

> *el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de un altura y la “base” correspondiente,*

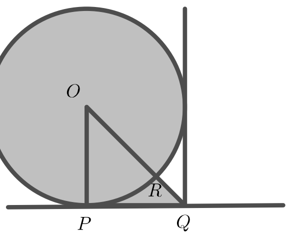
tenemos que

$$32 = \frac{OP \cdot PQ}{2} = \frac{8 \cdot PQ}{2},$$

de donde obtenemos que

$$PQ = 8.$$

Esto significa que el triángulo $\triangle OPQ$ es isósceles; luego el ángulo $\angle POQ$ mide 45 grados:



es decir, el sector circular POR es

$$\frac{360}{45} = \frac{1}{8}$$

de la circunferencia. Esto quiere decir, que el área de este sector es $\frac{1}{8}$ del área de la circunferencia:

$$\text{Área del sector } POR = \frac{1}{8}\left(\pi \cdot 8^2\right) = 8\pi$$

centímetros cuadrados. Luego, el área de la región PRQ del triángulo es igual a

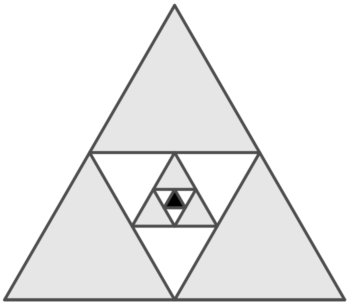
$$32 - 8pi = 8(4 - \pi)$$

centímetros cuadrados. Así, el área sombreada (del círculo más la región PRQ del triángulo) es igual a

$$\pi \cdot 8^2 + 8(4 - \pi) = 64\pi - 8\pi + 32 = 56\pi + 32$$

centímetros cuadrados. □

4. Todos los triángulos de la figura son equiláteros:



Si el triángulo más pequeño (el pintado de color negro) tiene un área igual a un centímetro cuadrado, ¿cuál es el área total de todos los triángulos pintados?

5. Considere la tabla

1	p	1
s	q	w
1	r	1

donde p, q, r, s y w pueden ser uno de los dígitos entre 0 y 5. Halla p, q, r, s y w de tal manera que:

(a) En cada fila quede un número "capicúa" (un número que al ser leído de izquierda a derecha es el mismo que al ser leído de derecha a izquierda; por ejemplo, 121 es un número capicúa).

(b) En dos de las tres columnas, quede un número capicúa distinto a los de las filas.

(c) En una y solo una de las columnas, no quede un número capicúa y que la suma de sus dígitos sea 7.

SEGUNDO NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. **Sea**

$$f = \frac{\sqrt[3]{(a^b\sqrt{a^b})^5}}{(b^a)^{\frac{5}{2}}},$$

donde $a, b \in \mathbb{N}$**.**

(a) Si $\ln f = \frac{5}{2}$**, calcula el valor de** $b \ln a - a \ln b$**.**

(b) Si $(b \ln a)^2 - (a \ln b)^2 = 1$**, encuentra una expresión para** $\ln f$**.**

Solución. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned}
\ln f &= \ln \sqrt[3]{\left(a^b \cdot \sqrt{a^b}\right)^5} - \ln b^{\frac{5}{2}a} \\
&= \frac{5}{3}\left(\ln a^b + \ln \sqrt{a^b}\right) - \frac{5}{2}a \cdot \ln b \\
&= \frac{5}{3}\left(b \cdot \ln a + \frac{b}{2} \cdot \ln a\right) - \frac{5}{2}a \cdot \ln b \\
&= \frac{5}{2}b \cdot \ln a - \frac{5}{2}a \cdot \ln b \\
&= \frac{5}{2}\left(b \cdot \ln a - a \cdot \ln b\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$(b \cdot \ln a - a \cdot \ln b) = \frac{\ln f}{\frac{5}{2}};$$

por tanto,

$$(b \cdot \ln a - a \cdot \ln b) = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1.$$

En segundo lugar, de la igualdad

$$(b \cdot \ln a)^2 - (a \cdot \ln b)^2 = 1,$$

tenemos que

$$(b \cdot \ln a - a \cdot \ln b)(b \cdot \ln a + a \cdot \ln b) = 1$$

que, junto con lo desarrollado en la primera parte, nos da

$$\frac{2}{5}\ln f(b \cdot \ln a + a \cdot \ln b) = 1;$$

es decir,

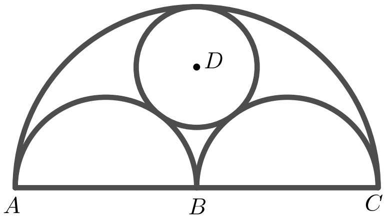
$$\begin{aligned}\ln f &= \frac{5}{2(b \cdot \ln a + a \cdot \ln b)}\\ &= \frac{5}{2(\ln a^b + \ln b^a)}\\ &= \frac{5}{2\ln(a^b \cdot b^a)};\end{aligned}$$

es decir,

$$\ln f = \frac{5}{2\ln(a^b \cdot b^a)}.$$

□

2. **El círculo de centro D es tangente a los otros tres círculos:**

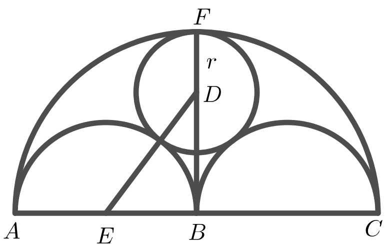


Si $\overline{AC}$ es el diámetro del círculo de centro B y mide 6 unidades, y AB y BC son los diámetros de los otros dos círculos, encuentre el área del círculo de centro D.

Solución. Para encontrar el área del círculo de centro D, debemos hallar su radio r, pues si A es el área de un círculo cuyo radio mide r, entonces

$$A = \pi r^2.$$

Para encontrar r, consideremos los siguientes trazos adicionales:



El segmento $\overline{FB}$ es el radio del círculo grande, luego $FB = 3$; y, por tanto, el segmento $\overline{DB}$ mide $3 - r$. El segmento $\overline{EB}$ es radio del círculo de centro E; luego, $EB = \frac{3}{2}$. Finalmente, también tenemos que $ED = \frac{3}{2} + r$. Y, como el triángulo $\triangle EDB$ es rectángulo, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

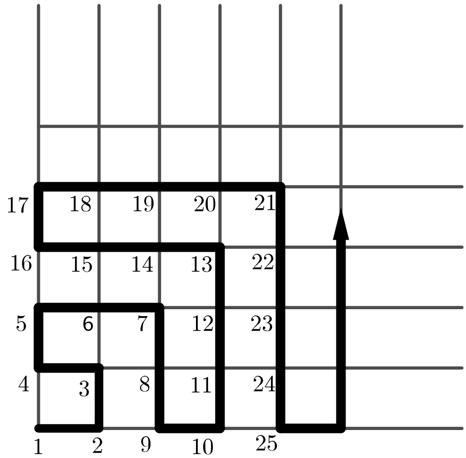
$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (3-r)^2 = \left(\frac{3}{2} + r\right)^2 &\equiv \frac{9}{4} + (9 - 6r + r^2) = \frac{9}{4} + 3r + r^2\\ &\equiv 9 = 9r\end{aligned}$$

$$\equiv \ r = 1.$$

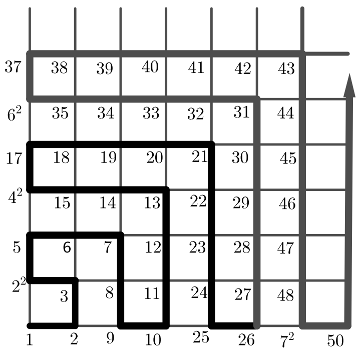
Luego, el área del círculo de centro D es

$$A = \pi(1)^2 = \pi. \qquad \square$$

3. **Los puntos de la red cuadriculada que se muestra en la figura están numerados a partir del vértice inferior izquierdo, siguiendo un camino poligonal sugerido en el esquema. Considera el punto correspondiente al número** 2018**. ¿Cuál es el número correspondiente al punto situado inmediatamente bajo el punto numerado por** 2018**? ¿Y el ubicado inmediatamente a la izquierda?**



Solución. Observemos que los puntos numerados con cuadrados perfectos de números pares están ubicados siempre en el eje vertical; en cambio, los puntos numerados con cuadrados perfectos de números impares están el eje horizontal:



Además observa que:

(a) Un punto numerado con n^2 está en la fila o en la columna n (según sea impar o par, respectivamente). Así el 49 está en la columna 7 y 36 está en la fila 6.

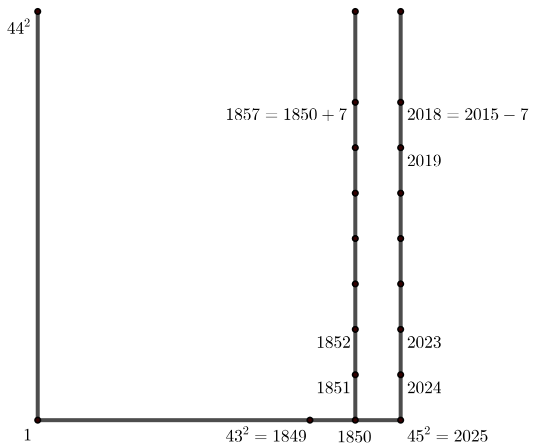
(b) El número de puntos en las columnas que tiene como base n^2 con n impar es n y están numerados de abajo hacia arriba en forma descendente. Por ejemplo, la columna con base 3^2 tiene 3 puntos numerados de abajo hacia arriba en forma descendente: 9, 8, 7; la columna con base 5^2 tiene 5 puntos numerados de abajo hacia arriba en forma descendente: 25, 24, 23, 22, 21.

(c) Los puntos en la columna anterior a una que tiene como base un cuadrado perfecto de un número impar están numerados de abajo hacia arriba en forma ascendente; por ejemplo, la que tiene que como base a 10, antes de 5^2, está numerada así: 10, 11, 12, 13.

Con estas observaciones, busquemos los cuadrados perfectos entre los cuales está 2018: estos son el 1936 y el 2025:

$$1936 = 44^2 < 2018 < 2025 = 45^2.$$

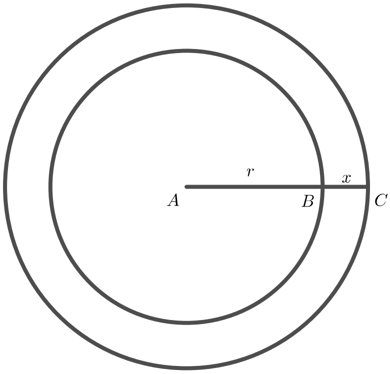
Por lo tanto, la ubicación de los puntos numerados con estos dos cuadrados perfectos es la siguiente:



Así, el punto ubicado inmediatamente bajo el que está numerado con 2018 es el 2019 y el que está ubicado inmediatamente a la izquierda está numerado con 1857. □

4. **Supón que la Tierra es esférica y que la rodeamos con una cuerda por el ecuador. Si alargamos esa cuerda** 1 **metro y la colocamos como un círculo concéntrico con la Tierra, alrededor de esta, ¿habrá espacio suficiente para que pase un conejo de** 14 **centímetros de altura por debajo de la cuerda?**

Solución. Nombremos con r y p el radio y el perímetro de la Tierra, respectivamente. Y nombremos con R y P el radio y el perímetro del círculo formado con la cuerda:



Si nombramos con x la distancia entre la circunferencia de la cuerda y de la Tierra, tenemos que

$$x = R - r.$$

Por otra parte, sabemos que el perímetro de la circunferencia elaborada con la cuerda tiene un metro más que el perímetro de la Tierra. Por tanto,

$$\begin{aligned} P = p + 1 &\equiv 2\pi R = 2\pi r + 1 \\ &\equiv 2\pi(r + x) = 2\pi r + 1 \\ &\equiv 2\pi r + 2\pi x = 2\pi r + 1 \\ &\equiv 2\pi x = 1 \\ &\equiv x = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Pero, como

$$2\pi < 7,$$

tenemos que

$$x = \frac{1}{2\pi} > \frac{1}{7} > 0{,}14.$$

Es decir, x es mayor que 0,14 metros; es decir, 14centímetros; luego, el conejo sí pasa por el espacio entre ambas circunferencias. □

5. **Encuentra todas las parejas de números primos positivos p y q que satisfacen la ecuación**

$$p^q + q^p = 2^{q+1} + 1.$$

Solución. Puesto que el número

$$2^{q+1} + 1$$

es impar y la suma de dos números es impares es siempre par, uno de los números

$$p^p \quad \text{o} \quad q^p$$

debe ser par; luego, exactamente uno de los números p y q debe ser un número par. Por otra parte, P y q deben ser números primos; luego, p o q solo podrían ser el número 2. Si $p = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} p^q + q^p = 2^{q+1} + 1 &\equiv 2^q + q^2 = 2^{q+1} + 1 \\ &\equiv q^2 - 1 = 2^{q+1} - 2^q \\ &\equiv q^2 - 1 = 2^q. \end{aligned}$$

Esta igualdad es verdadera si $q = 3$:

$$3^2 - 1 = 2^3.$$

Si $q > 3$, se tiene que

$$q^2 - 1 < 2^q,$$

luego ningún $q > 3$ satisface la igualdad

$$q^2 - 1 = 2^q.$$

Si $q = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} p^q + q^p = 2^{q+1} + 1 &\equiv p^2 + 2^p = 2^3 + 1 \\ &\equiv p^2 + 2^p = 9. \end{aligned}$$

Puesto que $p \geq 3$, tenemos que

$$p^2 + 2^p > 9,$$

de donde podemos concluir no existe ningún p para el cual se verifique la igualdad

$$p^2 + 2^p = 9.$$

En conclusión, la ecuación

$$p^q + q^p = 2^{q+1} + 1,$$

donde p y q deben ser positivos y primos, tiene como única solución $p = 2$ y $q = 3$. □

Tercer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. **Dada la función definida por**

$$f(x) = \frac{100x^{101} - 101x^{100} + 1}{x^6 - x^5 - x + 1},$$

¿a qué valor se aproxima $f(x)$ para valores de x cercanos a 1?

Solución. Dado que no podemos evaluar la función en $x = 1$, procedamos a expresar como productos tanto el polinomio del numerador como el del denominador. Para los siguientes cálculos, suponemos que $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{100x^{101} - 101x^{100} + 1}{x^6 - x^5 - x + 1} &= \frac{100 \cdot (x^{101} - x^{100}) - (x^{100} - 1)}{x^5 \cdot (x-1) - (x-1)} \\
&= \frac{100x^{100} \cdot (x-1) - (x-1) \cdot (x^{99} + x^{98} + \ldots + x^2 + x + 1)}{(x-1) \cdot (x^5 - 1)} \\
&= \frac{(x-1)(100x^{100} - (x^{99} + x^{98} + \ldots + x^2 + x + 1))}{(x-1) \cdot (x^5 - 1)} \\
&= \frac{100x^{100} - (x^{99} + x^{98} + \ldots + x^2 + x + 1)}{x^5 - 1} \\
&= \frac{100x^{100} - x^{99} - x^{98} - \ldots - x^2 - x - 1}{x^5 - 1}
\end{aligned}$$

Esta última expresión no es válida para $x = 1$. Dado que el polinomio del numerador es igual a 0 cuando $x = 1$, este polinomio debe tener como factor $x - 1$; para hallar este factor, vamos utilizar la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l}
100x^{100} - \quad x^{99} - \quad x^{98} - \ldots - x^2 - x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-100x^n + 100x^{99} \qquad\qquad\qquad\qquad & 100x^{99} + (99)x^{98} + (98)x^{97} + \ldots + 3x^2 + 2x + \\ \hline
0 + 99x^{99} - \quad x^{98} - \ldots - x^2 - x - 1 & \\
-99x^{99} + 99x^{98} \qquad\qquad\qquad & \\ \hline
0 + 98x^{98} - \ldots - x^2 - x - 1 & \\
\vdots & \\
0 &
\end{array}$$

Por tanto,

$$\frac{100x^{100} - x^{99} - x^{98} - \ldots - x^2 - x - 1}{x^5 - 1} = \frac{(x-1)(100x^{99} + 99x^{98} + 98x^{97} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$$
$$= \frac{100x^{99} + 99x^{98} + 98x^{97} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Por todos estos cálculos, se tiene que para x cercano a 1:

$$\frac{100x^{101} - 101x^{100} + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{100x^{99} + 99x^{98} + 98x^{97} + \ldots + 2x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$$
$$\approx \frac{100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1}{1 + 1 + 1 + 1 + 1}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

tenemos que

$$\frac{100x^{101} - 101x^{100} + 1}{x^6 - x^5 - x + 1} \approx \frac{100 \cdot 101}{10} = 1\,010.$$

cerca de $x = 1$. $\square$

2. **Demuestre que para todo** $n \in \mathbb{N}$ **y par, al dividir el número**

$$35^n + 2 \cdot 7^n - 5^n$$

para 36**, el residuo es** 2**.**

Solución. Vamos a utilizar el método de Inducción Matemática para demostrar que

$$35^n + 2 \cdot 7^n - 5^n = 36k + 2$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

- Para $n = 0$, tenemos que

  $$35^n + 2 \cdot 7^n - 5^n = 1 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 = 36 \cdot 0 + 2,$$

  de donde, al dividir 2 para 36, se tiene residuo 2.

- La hipótesis de inducción es: el residuo de dividir

  $$35^n + 2 \cdot 7^n - 5^n$$

  para 36 es 2, donde n es par; es decir, se tiene que

  $$35^n + 2 \cdot 7^n - 5^n = 36m + 2,$$

  donde n es par, para algún $m \in \mathbb{Z}$.
  Debemos demostrar que, al dividir

  $$35^{n+2} + 2 \cdot 7^{n+2} - 5^{n+2}$$

para 36, se tiene residuo 2; es decir, se tiene que

$$35^{n+2} + 2 \cdot 7^{n+2} - 5^{n+2} = 36k + 2$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.
Notemos que

$$35^{n+2} + 2 \cdot 7^{n+2} - 5^{n+2} = 35^2 \cdot 35^n + 2 \cdot 49 \cdot 7^n - 25 \cdot 5^n.$$

Además,

$$35^2 = (36-1)^2 = 36^2 - 2 \cdot 36 + 1 = 34 \cdot 36 + 1$$

y

$$49 = 36 + 13.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
35^{n+2} + 2 \cdot 7^{n+2} - 5^{n+2} &= 35^2 \cdot 35^n + 2 \cdot 49 \cdot 7^n - 25 \cdot 5^n \\
&= (34 \cdot 36 + 1)35^n + 2 \cdot (36 + 13) \cdot 7^n - 25 \cdot 5^n \\
&= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n) \cdot 36 + 35^n + 26 \cdot 7^n - 25 \cdot 5^n \\
&= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n) \cdot 36 + (35^n + 2 \cdot 7^n - 5^n) + 24 \cdot (7^n - 5^n) \\
&= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n) \cdot 36 + 36m + 2 + 24 \cdot (7^n - 5^n) \\
&= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n + m) \cdot 36 + 2 + 24 \cdot (7^n - 5^n)
\end{aligned}$$

Recordemos que n es par. Así, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$n = 2k.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(7^n - 5^n) &= 24(7^{2k} - 5^{2k}) \\
&= 24(49^k - 25^k) \\
&= 24(49 - 25)(49^{k-1} + 49^{k-2} \cdot 25 + \ldots + 49 \cdot 25^{k-2} + 25^{k-1}) \\
&= 24^2(49^{k-1} + 49^{k-2} \cdot 25 + \ldots + 49 \cdot 25^{k-2} + 25^{k-1}) \\
&= 36 \cdot 16(49^{k-1} + 49^{k-2} \cdot 25 + \ldots + 49 \cdot 25^{k-2} + 25^{k-1}) \\
&= 36 \cdot l,
\end{aligned}$$

donde

$$l = 16(49^{k-1} + 49^{k-2} \cdot 25 + \ldots + 49 \cdot 25^{k-2} + 25^{k-1}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
35^{n+2} + 2 \cdot 7^{n+2} - 5^{n+2} &= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n + m) \cdot 36 + 2 + 24 \cdot (7^n - 5^n) \\
&= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n + m) \cdot 36 + 2 + 36 \cdot l \\
&= (34 \cdot 35^n + 2 \cdot 7^n + m + l) \cdot 36 + 2,
\end{aligned}$$

de donde, el residuo de dividir $35^{n+2} + 2 \cdot 7^{n+2} - 5^{n+2}$ para 36 es 2. □

3. **Halle el menor entero positivo n tal que para todo entero impar a, la expresión**

$$a^2(a^2 + 6) + 2018 + n$$

sea múltiplo de 16**.**

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} a^2(a^2+6)+2018+n &= (a^4+6a^2+9)+2009+n \\ &= (a^2+3)^2+2009+n \\ &= (a^2+3)^2+2000+(9+n) \end{aligned}$$

Puesto que a es impar, a^2 también lo es; luego (a^2+3) es un múltiplo de 4, de donde $(a^2+3)^2$ es múltiplo de 16.
Por otra parte, 2000 es múltiplo de 16. Luego, para mostrar que $a^2(a^2+6)+2018+n$ es un múltiplo de 16, solo necesitamos hallar el menor entero positivo n para el cual $9+n$ es múltiplo de 16. Ese número es, evidentemente, el 7. □

4. **Definimos un número triangular** T_n **como el número obtenido al hacer un arreglo triangular, de** n **filas, con esferas (como se colocan las bolas de billa antes de un juego). Así, por ejemplo,** $T_1 = 1$**,** $T_2 = 3$**,** $T_3 = 6$**,** $T_4 = 10$**,** $T_5 = 15$**,** $T_6 = 21$**, etcétera.**

   (a) ¿Es T_{2018} **un múltiplo de** 5**?**

   (b) ¿Es T_{2019} **un múltiplo de** 5**?**

Solución. Observa que

$$T_2 = T_1+2, \quad T_3 = T_2+3, \quad T_4 = T_3+4, \quad T_5 = T_4+5, \quad T_6 = T_5+6.$$

Mediante inducción matemática, es fácil probar que

$$T_n = T_{n-1}+n$$

para todo número natural $n > 1$, donde $T_1 = 1$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1}+n \\ &= (T_{n-2}+(n-1))+n \\ &= T_{n-2}+(n-1)+n \\ &= (T_{n-3}+(n-2))+(n-1)+n \\ &= T_{n-3}+(n-2)+(n-1)+n. \end{aligned}$$

Y podemos conjeturar que

$$T_n = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

y probarlo mediante inducción matemática, para concluir, finalmente que

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Así,

$$T_{2018} = \frac{2018(2018)}{2},$$

de donde T_{2018} no es un múltiplo 5, ya que 2018 no lo es.
T_{2019} sí es múltiplo de 5 ya que

$$T_{2019} = 2019 \cdot 1010$$

y 1010 sí es múltiplo de 5. □

5. **¿Para qué valores de x, la expresión**

$$\frac{\cos x + \cot x}{\operatorname{sen} x + \tan x}$$

representa un número negativo?

Solución. Para ninguno. En efecto, basta ver que si $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x \neq 0$ y $\cos x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x + \cot x}{\sin x + \tan x} &= \frac{\cos x + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \\
&= \frac{\cos x \left(\dfrac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x} \right)}{\operatorname{sen} x \left(\dfrac{\cos x + 1}{\cos x} \right)} \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x + 1)\cos^2 x}{(\cos x + 1)\operatorname{sen}^2 x}
\end{aligned}$$

y todas los factores que aparecen en dicha expresión son no negativos, ya que

$$\cos^2 x \geq 0 \quad \text{y} \quad \sin^2 x \geq 0,$$

y dado que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos x \leq 1,$$

también

$$\operatorname{sen} x + 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad \cos x + 1 \geq 0.$$

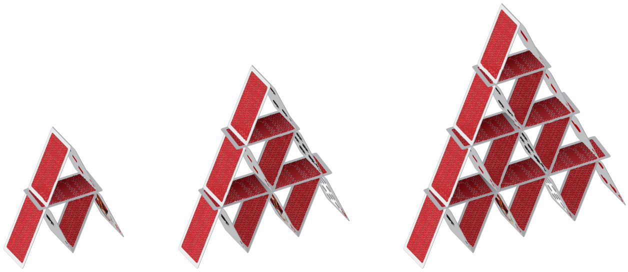
□

Pruebas de las XIV Olimpiadas

PRIMER NIVEL INFANTIL

Preguntas y soluciones

1. En la figura, se muestran tres castillos construidos utilizando barajas: el primero tiene dos niveles, el segundo tres y el tercero cuatro niveles:



Siguiendo este modelo para construir castillos de barajas, imagina que vamos a construir uno que en el primer nivel tenga 12 cartas (o lo que es lo mismo, 6 triángulos). Sobre estas 12 cartas del primer nivel, deben colocarse 5 cartas horizontales que servirán de base para colocar las cartas del nivel 2. **¿Cuántas cartas necesitamos para que el castillo tenga** 6 **niveles completos?**

Solución. El número de cartas requeridas para construir un castillo de 7 niveles es 57.
En efecto, el castillo de dos niveles requiere de 7 cartas. Ahora bien, si observas con atención el castillo de tres niveles, este puede ser visto como un castillo que se construye al colocar un castillo de nos niveles (que corresponderían a los niveles 2 y 3) sobre una base de 6 cartas verticales y 2 horizontales. Esto quiere decir que el castillo de tres niveles tendría un total de

$$6 + 2 + 7 = 15$$

cartas.
De un modo similar, puedes contar las cartas utilizadas en el castillo de cuatro niveles: este castillo se construye al colocar sobre una base de 8 cartas verticales y 3 horizontales un castillo de tres niveles (el mismo que requiere de 15 cartas). Por tanto, el número total de cartas requeridas para un castillo de cuatro niveles es:

$$8 + 3 + 15 = 26.$$

Ya puedes adivinar cómo se construye un castillo de cinco niveles: se coloca un castillo de cuatro niveles (que tiene 26 cartas) sobre una base constituida de 10 cartas verticales y 4 cartas horizontales; es decir, un castillo de cinco niveles necesita

$$10 + 4 + 26 = 40$$

cartas.
Finalmente, el castillo de seis niveles requerirá de

$$12 + 5 + 40 = 57$$

cartas.
En resumen, se necesitan 57 barajas para construir el castillo.
El procedimiento seguido te permite obtener fácilmente una solución general a este problema. Para ello, observa en la siguiente tabla el número de cartas verticales y horizontales que tiene la base:

Nivel	Verticales	Horizontales
2	4	0
3	6	1
4	8	3
5	10	4
6	12	5

Esto quiere decir que en un castillo de nivel n, con $n \geq 2$, la base tendrá $2n$ cartas verticales y $n - 1$ cartas horizontales. Luego, si nombras con C_n es número de cartas del castillo de n niveles, obtendrás que

$$C_n = 2n + (n-1) + C_{n-1} = 3n - 1 + C_{n-1};$$

es decir, el número de cartas del castillo de nivel n es igual a $3n - 1$ más el número de cartas del castillo del nivel anterior $n - 1$, siempre que $n > 2$. □

2. En mi cumpleaños me regalaron un pastel de forma circular. Si Juan comió la mitad de la octava parte del pastel y Marlene comió la tercera parte de un cuarto del pastel, **¿quién comió más pastel: Juan o Marlene?**

Solución. Lo que comió Juan del pastel es la mitad de un octavo

$$\frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}.$$

En cambio, Marlene disfrutó de la tercera parte de un cuarto de pastel; es decir, comió

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Puesto que

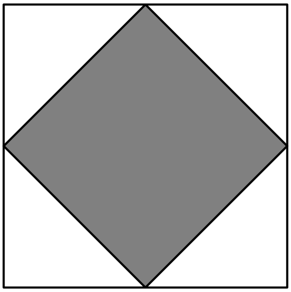
$$12 < 16,$$

se tiene que

$$\frac{1}{12} > \frac{1}{16};$$

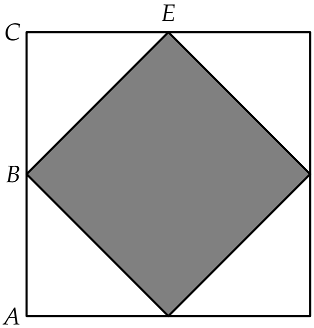
por tanto, Marlene comió más pastel que Juan. □

3. El lado del cuadrado externo mide 10 centímetros:



Los vértices del cuadrado interior (sombreado) están en los puntos medios de los lados del cuadrado externo. **¿Cuál es el área de la región no sombreada?**

Solución. El área del cuadrado sombreado es igual al área al área del cuadrado exterior, cuyo lado mide 10 centímetros, disminuido en las cuatro áreas de los triángulos rectángulos no sombreados:



Ahora bien, esos cuatro triángulos tienen la misma área, ya que son congruentes. Y, puesto que los puntos B y E son puntos medios de los respectivos lados, se tiene que cada cateto mide 5 centímetros. Por tanto, el área de cada triángulo es igual a

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

Como el área del cuadrado exterior es igual a

$$10 \cdot 10 = 100$$

centímetros cuadrados, tienes que el área del cuadrado sombreado es igual a

$$100 - 4 \cdot \frac{25}{2} = 100 - 50 = 50$$

centímetros cuadrados. □

4. A mi hermana no le gusta arreglar su cuarto. Por ello, mi papá le ofreció un premio cada vez que ella ponga en orden su habitación. Como ella adora las tarjetas de pókemon, le propuso a mi papá que el primer día que arregle el cuarto, él le premie con 2 tarjetas de pókemon y, a partir de ese día, cada vez que ordene la habitación, él le compre el doble de tarjetas que haya recibido la última vez (así, el segundo día que arregle el cuarto, recibirá 4, el tercero, 8, etcétera). Cada tarjeta tiene un costo de 50 centavos, así que a mi papá le pareció razonable la propuesta de mi hermana; con todo, mi padre le impuso un límite al valor del premio: 80 dólares.

Si el primer día en que mi hermana arregla su cuarto fuese hoy día, sábado 6 de mayo, y lo hiciera todos los días hasta el próximo sábado, 13 de mayo, **¿serán suficientes los 80 dólares para premiar a mi hermana?**

Solución. Entre el 6 de mayo y el 13 de mayo han transcurrido 8 días. Como la niña empezó su colección con 2 tarjetas, el segundo día recibirá

$$2 \cdot 2 = 2^2 = 4,$$

el tercero

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 = 2^4 = 8;$$

el cuarto, 2^4, etcétera, hasta que el octavo día recibirá 2^8; luego, la niña debería recibir

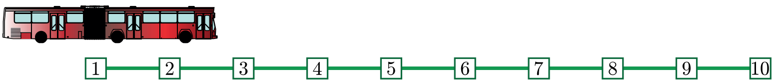
$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 510$$

tarjetas.
Como cada tarjeta tiene un costo de 50 centavos, el dinero necesario para cumplir con el compromiso es

$$0{,}5 \times 510 = 255$$

dólares, 5 más de lo presupuestado. Por tanto, el papá no tendrá dinero suficiente para comprar los premios. □

5. Una línea de la Ecovía pasa por 10 estaciones, como se indica en el gráfico:

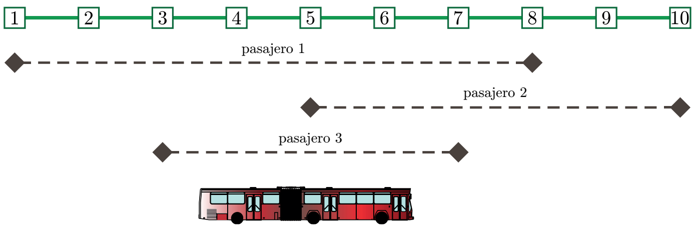


El bus viaja de la estación 1 a la 10, pasando por todas y cada una de las paradas intermedias. El tiempo de viaje entre 2 estaciones consecutivas es siempre de 4 minutos. Andrea, Lucía y Miguel son pasajeros que utilizan esta línea de la Ecovía según la siguiente tabla:

Pasajero	**Origen**	**Destino**
Andrea	1	8
Lucía	5	10
Miguel	3	7

Cierto día, Andrea, Lucía y Miguel estaban en sus paradas de origen en el mismo instante en que Andrea se embarcó en el bus. Lucía y Miguel, a su debido momento, se embarcaron también en el bus en el que iba Andrea. **¿Cuántos minutos estuvieron los tres pasajeros en el bus al mismo tiempo?**

Solución. El siguiente dibujo muestra el recorrido que realizan Andrea, Lucía y Miguel aquel día en el que coincidieron en el viaje:



Como puedes apreciar fácilmente, los tres jóvenes comparten el bus desde la estación 5 hasta la estación 7. □

Segundo Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. En una escuela existen 15 paralelos de los distintos niveles y 3 salas de profesores. En cada paralelo, se encuentran matriculados exactamente 12 niños y, en cada sala, siempre se reúnen 5 profesores. Para fomentar la socialización y estimular la cooperación entre estudiantes y maestros, la institución propone la siguiente tarea a cada uno de los estudiantes:

    - Seleccionar el 40 % de los paralelos y entrevistar a $\frac{1}{3}$ de los alumnos de cada uno de estos cursos; y
    - seleccionar los $\frac{2}{3}$ de las salas de profesores y entrevistar al 60 % de los maestros de cada una de dichas salas.

    ¿A cuántas personas debe entrevistar cada estudiante de la escuela para completar su tarea?

    Solución. El número de cursos que deben ser seleccionados es el 40 % de los 15 cursos existentes; es decir, deben seleccionarse

    $$0{,}4 \cdot 15 = 6$$

    cursos.
    Por otra parte, de cada uno de estos paralelos se debe seleccionar a $\frac{1}{3}$ de estudiantes; luego, en cada uno hay 12 estudiantes, se deberán seleccionar

    $$\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

    estudiantes de cada uno de esos 6 cursos; así, se deberán entrevistar a

    $$4 \cdot 6 = 24$$

    estudiantes.
    Por otra parte, los $\frac{2}{3}$ de las 3 salas de profesores es igual a 2 salas de profesores, pues

    $$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

    Y se debe entrevistar al 60 % de los maestros de cada una de esas salas; esto significa que hay que entrevistar a

    $$2 \cdot (0{,}6 \cdot 5) = 6$$

    maestro.

Por tanto, cada estudiante del colegio debe entrevistar a

$$24 + 6 = 30$$

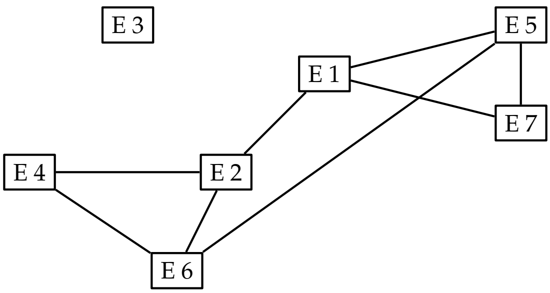
personas. □

2. El profesor de Matemática va a organizar a los 7 estudiantes de su clase en grupos. El número de integrantes de los grupos puede variar entre uno y siete (grupos de 1 estudiante, de 2, etcétera, de 7 estudiantes). Para que el trabajo grupal sea desarrollado exitosamente, el maestro considera que la distancia entre las casas de los miembros de un grupo no debe ser mayor a 1 kilómetro. Bajo las restricciones impuestas por el profesor, **¿cómo deberían conformarse los grupos para que haya el menor número de ellos?**
Las distancias entre los hogares de los estudiantes viene dada en la siguiente tabla:

	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7
E 1	–	0,9	2,4	3,9	0,5	1,5	0.7
E 2	0.9	–	4,5	0,8	1,5	0.4	1,5
E 3	2.4	4.5	–	4,4	2,1	3,5	2.8
E 4	3.9	0.8	4.4	–	3,5	0.3	1,5
E 5	0.5	1.5	2.1	3.5	–	0,8	0.7
E 6	1.5	0.4	3.5	0.3	0.8	–	1,5
E 7	0.7	1.5	2.8	1.5	0.7	1,5	–

Por ejemplo, la distancia entre la casa del estudiante 1 y la del estudiante 2 es 0,9 kilómetros; y la distancia entre las casas de los estudiante 3 y 4 es de 4,4 kilómetros.

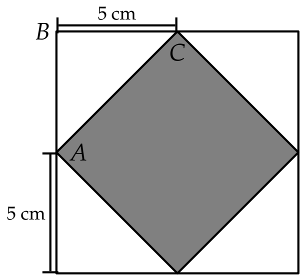
Solución. En primer lugar, vamos a identificar los pares de estudiantes cuyas viviendas no están separadas por más de un kilómetro. Para ello, dibujamos en un plano rectángulos que representan las casas de cada estudiante y conectamos aquellos rectángulos mediante una línea recta siempre que la distancia entre las viviendas es menor que un kilómetro:



Los miembros de un grupo deben estar conectados todos entre sí. Luego, está claro que pueden haber varias maneras de formar los grupos. Por ejemplo, se pueden organizar 7 grupos de un solo estudiante. O también podrían constituirse cinco grupos: el formado únicamente por el estudiante 1, otro por el estudiante 5, otro por el estudiante 7 y uno más formado por los estudiantes 2, 4 y 6.
Sin embargo, del gráfico podemos ver que el número mínimo de grupos es 3: el primero formado por los estudiantes 1, 5 y 7; el segundo formado por los estudiantes 2, 4 y 6 forman un segundo grupo; y, finalmente, un tercer grupo constituido por el estudiante 3 únicamente. □

3. En un cuadrado cuyo lado mide 10 centímetros se inscribe otro cuadrado cuyos vértices son los puntos medios del primer cuadrado. **Dibuja los dos cuadrados y determina la diferencia (en centímetros cuadrados) entre las áreas de los dos cuadrados**.

   Solución. En primer lugar, el siguiente es un dibujo de los dos cuadrados:

   El área A_1 del primer cuadro (del que mide 10 centímetros) es:

   $$A_1 = 10 \times 10 = 100$$

   centímetros cuadrados.
   Ahora bien, el lado del cuadro interno (el sombreado) es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ cuyos catetos miden 5 centímetros cada uno:

   $$AC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

   centímetros.
   Luego, el área del cuadro interno (sombreado) es:

   $$A_2 = AC^2 = \sqrt{50} \times \sqrt{50} = 50$$

   centímetros cuadrados.
   Así, la diferencia entre ambas áreas es

   $$A_1 - A_2 = 50$$

   centímetros cuadrados. □

4. Por su cumpleaños, Juan Manuel recibe una bolsa con 1 000 chocolates; el color de la envoltura de un chocolate puede ser de uno de los siguientes colores: blanco, amarillo, rojo, verde o café. De los 1 000 chocolates, 201 chocolates están envueltos en papel de color blanco; 198 tienen envoltura de color amarillo; 204 tienen envoltura de color rojo; 187 envoltura de color verde y 210 envoltura de color café.
   Para comérselos, Juan Manuel se impone la siguiente regla: escoge al azar tres chocolates de la bolsa; si los tres son del mismo color, se los come; si no, los regresa a la bolsa. Juan Manuel aplicó su regla hasta que sólo le quedó un chocolate en la bolsa. **¿De qué color era su envoltura?**

   Solución. Observemos que los números 201, 198, 204 y 210, que indican las cantidades de chocolates de color blanco, amarillo, rojo y café, respectivamente, son número múltiplos de 3; en cambio el número de unidades envueltas en papel de color verde es 187, que no es múltiplo de 3. Esto quiere decir, siempre que salen

tres chocolates de un mismo color, uno de esos colores siempre debe ser o blanco, amarillo, rojo o café, pero en algunas ocasiones podría no ser de color verde.
Ahora bien, como

$$187 = 62 \times 3 + 1,$$

luego de sacar 62 veces grupos de tres chocolates verdes, quedará uno. Así, el último chocolate que Juan Manuel disfrutó estaba envuelto en papel verde. $\square$

5. Observa las siguientes restas:

$$\begin{gathered} 100 - 99 = 1 \\ 1\,000 - 99 = 901 \\ 10\,000 - 99 = 9\,901 \\ \dots \end{gathered}$$

¿A qué es igual $10^{10} - 99$?

Solución. En primer lugar, reescribe esta secuencia utilizando la notación exponencial para los múltiplos de 10:

$$\begin{gathered} 10^2 - 99 = 1 \\ 10^3 - 99 = 901 \\ 10^4 - 99 = 9\,901 \\ \dots \end{gathered}$$

Ahora, si "das un paso más en la secuencia", la cuarta igualdad es

$$10^5 - 99 = 99\,901.$$

Luego, parece ser que el patrón que tiene la secuencia es el siguiente: el último dígito del número es 1, el penúltimo, 0 y los demás son números nueves. ¿Cuántos? Podemos ver que la relación entre el exponente y el número de nueves en el resultado de la operación es:

exponente	número de nueves en la respuesta
2	0
3	1
4	2
5	3

Es decir, hay dos números nueves más en el exponente que en el resultado de las operaciones. Luego, concluimos que

$$10^{10} - 99 = \overbrace{9\,999\,999\,9}^{8 \text{ veces}}01. \qquad \square$$

Primer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. El número 26 es uno que puede expresarse como la suma de cuatro números enteros consecutivos:
$$26 = 5 + 6 + 7 + 8;$$
otro número que tiene esta propiedad es el 406:
$$406 = 100 + 101 + 102 + 103.$$
¿Cuál es el número entero más grande menor que 2017 **que se puede expresar como una suma de cuatro números enteros consecutivos?**

Solución. Si n representa el número más pequeño de los cuatro buscados, los otros tres se representarán por
$$n+1, \quad n+2 \quad \text{y} \quad n+3.$$
Por tanto, tenemos que
$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$$
debe ser el entero más grande posible menor que 2 017; así deberá verificarse la desigualdad
$$4n + 6 \leq 2\,017,$$
de donde
$$\begin{aligned} n &= \left\lfloor \frac{2\,017 - 6}{4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2\,011}{4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 502 + \frac{3}{4} \right\rfloor \\ &= 502. \end{aligned}$$
Observa que
$$502 + 503 + 504 + 505 = 2\,014 \quad \text{y} \quad 503 + 504 + 505 + 506 = 2\,018.$$
Entonces, el número más pequeño, pero menor a 2 017, que puede expresarse como la suma de cuatro enteros consecutivos es el 2 014. □

2. Edgardo leyó un libro en 21 días. Lo leyó de una manera inusual: el primer día leyó tres páginas y, cada día siguiente, leyó dos páginas más que el día anterior. **¿Cuántas páginas tiene el libro?**

   Solución. Los cuatro primeros días Edgardo leyó

   $$3, \quad 3+2, \quad 3+2+2 = 3+2\times 2, \quad 3+2+2+2 = 3+3\times 2$$

   páginas, respectivamente. Por tanto, el último día, el 21, Edgardo leyó

   $$3+20\times 2$$

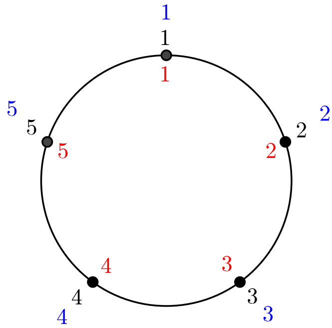
   páginas y, en total, en ese período, leyó

   $$\begin{aligned}\overbrace{3+(3+2)+(3+2\times 2)\ +\ldots+\ (3+20\times 2)}^{21 \text{ veces}} &= 21\times 3+(2+2\times 2+\ldots+19\times 2+20\times 2)\\ &= 63+(1+2+3+\ldots+19+20)\times 2\\ &= 63+\frac{20\times 21}{2}\times 2\\ &= 63+20\times 21\\ &= 483\end{aligned}$$

   páginas en esos 21 días. □

3. Para fabricar una pulsera de mullos, utilizamos una cuerda delgada que atraviese los mullos y luego la cerramos atando sus extremos entre sí. Si tuvieras cinco mullos de colores diferentes y los usaras todos para elaborar una pulsera, **¿cuántas pulseras distintas podrías armar?**

   Solución. Nombremos con los números 1 2, 3, 4 y 5 los cinco colores de mullos. Aunque en un arreglo circular no hay (en principio) un "inicio", asumamos por un momento que empezamos con un mullo de color 1. Para colocar los otros cuatro mullos, tenemos 4! posibles arreglos diferentes. Ahora bien, los arreglos lineales 12345 y 15432 representan el mismo arreglo circular (o, dicho en términos de pulseras, representan la misma pulsera), como puedes ver en el siguiente dibujo:

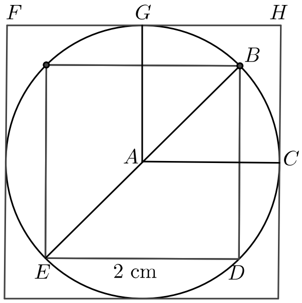


   Es decir, por cada arreglos lineales de los cuatro mullos restantes, siempre hay dos que representan la misma pulsera; luego, el número total de arreglos para armar la pulsera es

   $$\frac{4!}{2} = 12.$$ □

4. Considera un cuadrado inscrito en un círculo que, a su vez, también está inscrito en otro cuadrado. **¿Cuál es el área del cuadrado más grande sabiendo que el lado del cuadrado más pequeño mide 2 centímetros?**

   Solución. Observa el gráfico de los dos cuadrados y el círculo:



   Para calcular el área del cuadrado más grande, requerimos determinar la medida del lado $\overline{FH}$. Ahora bien, observemos que la medida de dicho lado es el doble de la medida del segmento $\overline{AC}$, cuya medida es igual a la del radio $\overline{AB}$. Esta medida es, a su vez, la mitad de la diagonal del cuadrado más pequeño. En resumen, el lado del cuadrado más grande mide lo mismo que la diagonal del cuadrado más pequeño, y esta diagonal (por el teorema de Pitágoras) mide

$$EB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

   centímetros. Luego,

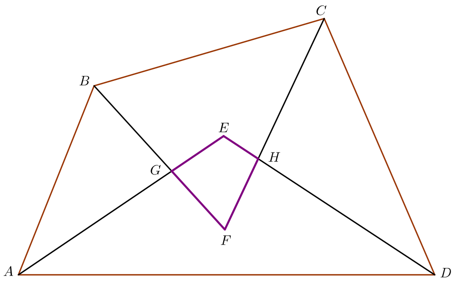
$$FH = 2\sqrt{2}$$

   y, por tanto, el área del cuadrado más grande es

$$FH^2 = 4 \times 2 = 8$$

   centímetros cuadrados. □

5. Considera el cuadrilátero $ABCD$:



   Los segmentos de rectas $\overline{BG}$, $\overline{AG}$, $\overline{CH}$ y $\overline{DH}$ bisecan los ángulos correspondientes a los vértices B, A, C y D. Estas bisectrices forman el cuadrilátero $GEHF$. **¿Cuál es el valor de la suma de las medidas de los ángulos internos $\angle E$ y $\angle F$ del cuadrilátero $GEHF$?**

   Solución. En el cuadrilátero $ABCD$, la suma de las medidas de los ángulos internos (cuyos vértices son A, B, C y D) es igual a 360. Al bisecarlos mediante los segmentos

$\overline{BG}$, $\overline{AG}$, $\overline{CH}$ y $\overline{DH}$, tenemos que

$$\text{m } \angle BAG + \text{m } ABG + \text{m } DCH + \text{m } CDH = 180.$$

Por otra parte, la suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos $\triangle ABG$ y $\triangle CDH$ es igual a 180, respectivamente:

$$\text{m } \angle BAG + \text{m } ABG + \text{m } \angle G = 180 \quad \text{y} \quad \text{m } \angle DCH + \text{m } CDH + \text{m } \angle H = 180.$$

Por tanto,

$$(\text{m } \angle BAG + \text{m } ABG + \text{m } \angle G) + (\text{m } \angle DCH + \text{m } CDH + \text{m } \angle H) =$$
$$180 + (\text{m } \angle G + \text{m } \angle H) = 360;$$

es decir,

$$180 + (\text{m } \angle G + \text{m } \angle H) = 360,$$

de donde la suma de los otros dos ángulos internos del cuadrilátero GEHF es igual a 180°. □

Segundo Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

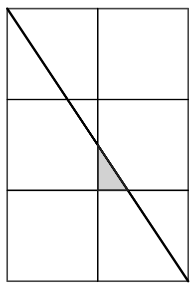
1. El matemático Augustus De Morgan vivió en el siglo XIX. En cierta ocasión afirmó:

   Yo tenía x años en el año x^2.

   ¿En qué año nació De Morgan?

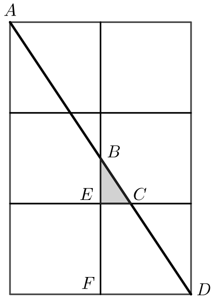
   Solución. Sabiendo que los años del siglo XIX están entre el 1801 y el 1900, tenemos que buscar un número natural x cuyo cuadrado esté en ese intervalo. El único número que cumple con esa propiedad es el 43. Por tanto De Morgan tenía 43 años en el 1849, habiendo nacido en el 1806. □

2. El lado de cada uno de los seis cuadrados mide 5 centímetros:



   ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

   Solución. El triángulo $\triangle BCE$ es rectángulo y la diagonal $\overline{AD}$ corta el lado vertical del cuadrado en el medio; entonces el lado vertical $\overline{BE}$ mide 2,5 centímetros:



Para calcular la longitud del lado horizontal $\overline{EC}$, observemos que los triángulos $\triangle BCE$ y $\triangle BDF$ son semejantes; por tanto,

$$\frac{CE}{DF} = \frac{EB}{FB},$$

de donde

$$\frac{CE}{5} = \frac{2{,}5}{7{,}5}.$$

Luego, $CE = \frac{5}{3}$ y el área del triángulo es

$$\frac{1}{2} \times 2{,}5 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

centímetros cuadrados. $\square$

3. Sabiendo que $X + Y = 1$ y $X^2 + Y^2 = 2$, **¿cúal es el valor de $X^3 + Y^3$?**

Solución. En primer lugar, tenemos que

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 = 1^2.$$

Ya que $X^2 + Y^2 = 2$, podemos deducir que

$$XY = \frac{1}{2}(1 - 2) = -\frac{1}{2}.$$

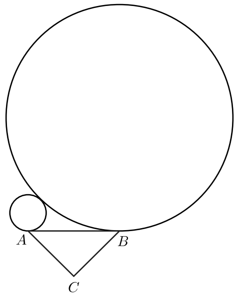
En segundo lugar, también sabemos que

$$(X + Y)(X^2 + Y^2) = X^3 + Y^3 + X^2Y + XY^2,$$

luego

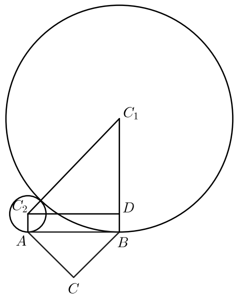
$$\begin{aligned} X^3 + Y^3 &= (X + Y)(X^2 + Y^2) - XY(X + Y) \\ &= 1 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$ $\square$

4. En la figura



el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles, donde el ángulo recto es $\angle C$; los dos círculos, de radios r_1 y r_2 respectivamente, son tangentes entre sí y tangentes al segmento de recta $\overline{AB}$. **¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$ en función de r_1 y r_2?**

Solución. Observa el dibujo:



En el triángulo rectángulo isóceles $\triangle ABC$, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2.$$

Así, el área del triángulo es

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{AB^2}{4}.$$

Para calcular la longitud AB, consideramos el triángulo de vértices A, B y C_2 y el triángulo rectángulo $\triangle C_1DC_2$. La longitud del lado $\overline{C_2D}$ es igual a AB, la longitud del lado $\overline{C_1C_2}$ es igual a la suma de los radios $r_1 + r_2$ y la longitud del lado C_1D es igual a $r_1 - r_2$, ya que los círculos son tangentes y, por tanto, los puntos son colineales.

Por tanto, por eel teorema de Pitágoras, obtenemos

$$\begin{aligned} AB^2 &= C_2C_1^2 - C_1D^2 \\ &= (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \\ &= 4r_1r_2. \end{aligned}$$

Entonces el área del triángulo es $\frac{AB^2}{4} = r_1r_2$. □

5. Demuestre que en cualquier conjunto de siete números naturales que son cuadrados perfectos, hay al menos dos cuya diferencia es divisible por diez.

Solución. En primer lugar, observemos que al último dígito (el del extremo derecho) es uno de los seis dígitos 0, 1, 4, 5, 6 y 9; luego, al haber siete cuadrados perfectos, dos de ellos tendrán igual el último dígito. Así, el último dígito de la diferencia entre estos dos números es 0 y, por tanto, divisible por diez. □

TERCER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. Demuestra que para cualquier número positivo x, se cumple que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Solución. Para todo $x > 0$, se verifican las siguientes equivalencias lógicas:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 \;&\equiv\; \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \\ &\equiv\; x^2 + 1 \geq 2x \\ &\equiv\; x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\equiv\; (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y la desigualdad

$$(x-1)^2 \geq 0$$

es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces también lo es la desigualdad

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

para todo $x > 0$. □

2. Demuestra que si $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $abcd = 1$, entonces

$$a(b+1) + d(c+1) \geq ad + 3.$$

Solución. En primer lugar, puesto que

$$abcd = 1,$$

tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$\begin{aligned} a(b+1) + d(c+1) \geq ad + 3 \;&\equiv\; ab + dc + a + d \geq ad + 3 \\ &\equiv\; ab + \frac{1}{ab} + a + d \geq ad + 3 \\ &\equiv\; 2 + a + d \geq ad + 3 \\ &\equiv\; a + d \geq ad + 1, \end{aligned}$$

pues, dado que $ab > 0$, por el ejercicio anterior sabemos que

$$ab + \frac{1}{ab} \geq 2.$$

Luego, para probar la desigualdad propuesta, nos faltaría mostrar la desigualdad

$$a + d \geq ad + 1.$$

Para esto, observemos que

$$\begin{aligned} a + d \geq ad + 1 &\equiv (a - ad) + (d - 1) \geq 0 \\ &\equiv a(1 - d) - (1 - d) \geq 0 \\ &\equiv (a - 1)(1 - d) \geq 0 \end{aligned}$$

y que

$$a \geq 1 \quad \text{y} \quad d \leq 1$$

porque

$$a \geq b \geq c \geq d \quad \text{y} \quad abcd = 1.$$

Por tanto,

$$(a - 1)(a - d) \geq 0$$

es verdadera y, con esto, sabemos que

$$a + d \geq ad + 1$$

también lo es. □

3. Si α y β son dos soluciones distintas de la ecuación

$$(x + 10)(x + 1) + (x + 10)(x - 1) + (x + 1)(x - 1) = 0, \tag{.1}$$

halla el valor de

$$\frac{1}{(\alpha + 2017)(\beta + 2017)} + \frac{1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} + \frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}. \tag{.2}$$

Solución. Notemos en primer lugar que tanto α como β son diferentes de 1, -1 y -10. Entonces, dividiendo (.1) por

$$(x + 1)(x - 1)(x + 10),$$

y evaluando la expresión resultante en α y β, obtenemos

$$\frac{1}{\alpha + 10} + \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha - 1} = 0 \tag{.3}$$

y

$$\frac{1}{\beta + 10} + \frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{\beta - 1} = 0 \tag{.4}$$

Además, mediante fracciones parciales, tenemos que si

$$f(x) = \frac{1}{(x + \alpha)(x + \beta)},$$

entonces

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\beta - \alpha}}{x + \alpha} + \frac{\frac{1}{\alpha - \beta}}{x + \beta}.$$

Entonces (.2) es equivalente a

$$\begin{aligned} f(1) + f(-1) + f(-10) &= \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha + 10}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{\beta - 1} + \frac{1}{\beta + 10}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Una solución alternativa es la siguiente: si expandemos (.1), obtenemos que

$$3x^2 + 20x - 1 = 0.$$

Como α y β son las raíces, tenemos que

$$g(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) = 3x^2 + 20x - 1.$$

Por tanto, (.2) es igual a

$$\begin{aligned} \frac{3}{g(1)} + \frac{3}{g(-1)} + \frac{3}{g(-10)} &= \frac{3}{22} - \frac{3}{18} + \frac{3}{99} \\ &= \frac{27 - 33}{2(99)} + \frac{3}{99} \\ &= -\frac{3}{99} + \frac{3}{99} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4. Si

$$A_{n,m} = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{n - m},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

demuestra que, si se fija n, la sucesión

$$A_{n,n},\ A_{n,n+1},\ A_{n,n+2},\ \ldots$$

tiene un único máximo en $m = 2n^2 - 1$.

Solución. En realidad, es posible demostrar algo más que lo pedido; a saber, que las siguientes cadenas de desigualdades se verifican:

$$A_{n,n} < A_{n,n+1} < A_{n,n+2} < \cdots < A_{n,2n^2-1} > A_{n,2n^2} > A_{n,2n^2+1} > \cdots$$

En efecto, consideremos el cociente

$$\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m+1)(m+1)}{(m+n+1)(m-n+1)}.$$

No es difícil cerciorarse de que

$$\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} > 1$$

siempre que

$$m < 2n^2 - 1$$

y que

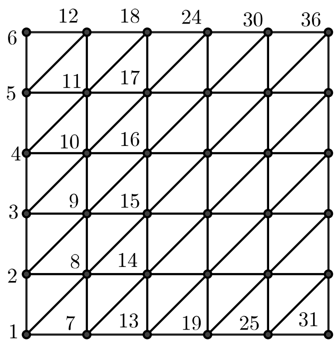
$$\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} < 1$$

si

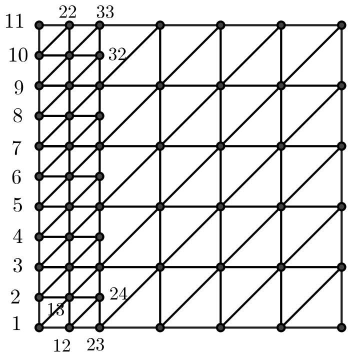
$$m > 2n^2 - 1.$$

Luego, las cadenas de desigualdades son válidas.
Finalmente, en particular, el máximo se obtiene, justamente en $m = 2n^2 - 1$. □

5. Gonzalo tiene un cuadrado mágico cuyos nodos (puntos) están numerados del 1 al 36:

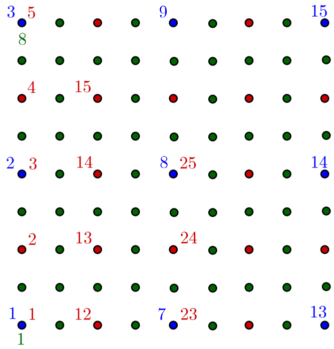


Si cada día el número de nodos del cuadrado crece dividiendo cada uno de sus triángulos en 4 nuevos triángulos, como se muestra en el gráfico:



¿Qué número tendría el nodo 15 **del cuadrado del primer día al cabo de tres días?**

Solución. El siguiente dibujo muestra el incremento de nodos al cabo de los tres días en el cuadrado de vértices 1, 3, 15 y 13:



Los nodos de color azul son los que habían el primer día; los de color rojo, el segundo día; y los de color verde, los del tercer día.
Como puedes observar, el nodo 15 del primer día, está en la columna nueve al cabo del tercer día y, su posición en esta columna (desde abajo) es la novena. Así que para averiguar qué número de nodo es, solo vamos a contar el total de todos que hay en las primeras ocho columnas.
Para ello, observa que hay siempre 3 nodos entre cada uno de los nodos originales: hay tres entre el 1 y el 2; entre el 2 y el 2, etcétera, y hay cinco pares de números consecutivos. Esto significa que, cada columna deben haber

$$5 \times 3 + 6 = 21$$

nodos (el término 6 se debe a los seis nodos originales). Luego, en las primeras ocho columnas hay

$$8 \times 21 = 168$$

nodos. Finalmente, como el nodo 15 ocupa la novena posición en la novena columna, el total de nodos hasta el original 15 es

$$168 + 9 = 177. \qquad \square$$