XII Edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Mayo 2015

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Directorio 2015
Presidente: Pedro Merino

Vicepresidenta: Andrea Moreira

Secretario: Sergio González

Tesorero: Diego Recalde

Vocales principales: Juan Carlos De los Reyes, Juan Carlos Trujillo, Miguel Yangari, John Skukalek.

Vocales suplentes: Eduardo Alba, Mario Cueva, Juan Fernando Guevara, Bryan Maldonado.

Comisiones para la elaboración de las preguntas de la XII edición de la Olimpiada Matemática

Categoría infantil, niveles 1 y 2: Sandra Gutiérrez, Diego Recalde (coordinador), Emilio Rosado, María Fernanda Salazar, Ramiro Torres.

Categoría juvenil, nivel 1: David Hervas (coordinador), Bryan Maldonado, John Skukalek.

Categoría juvenil, nivel 2: Eduardo Alba, Carlos Cortez, Wehrli Pérez, Luis Miguel Torres (coordinador).

Categoría juvenil, nivel 3: Cao Van Chung, Sergio González (coordinador), Pedro Merino, István Mezö, Juan Pablo Roggiero.

Sedes de la XII edición de la Olimpiada Matemática:

Quito
Escuela Politécnica Nacional (categoría juvenil). Coordinador: Pedro Merino
Universidad San Francisco de Quito (categoría infantil). Coordinador: Andrea Moreira

Riobamba
Universidad Nacional de Chimborazo. Coordinador: Rodrigo Briones

Loja
Universidad Técnica Particular de Loja. Coordinador: Patricio Puchaicela

Cuenca
Universidad de Cuenca. Coordinador: Neli González

Colaboradores: Myriam Guanoluisa, Estefanía Loayza, Katheryn Herrera, Christian Calderón, Paula Castro, Edwin Flores, Christian Núñez, Sofía López, María José Castellano, Diana Taipe, Ana LLumigusín, Pamela Herrera, Bryan Maldonado.

Instituciones colaboradoras: Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad Técnica Particular de Loja, Universidad Nacional de Chimborazo, Universidad de Cuenca, Sociedad Ecuatoriana de Estadística.

Edición de esta compilación: Diego Recalde

Edición de las pruebas de las Olimpiadas: Juan Carlos Trujillo

Colaboración en la edición de las pruebas de las Olimpiadas: Andrés Merino

Preparación del documento en LaTeX: Stephany Vargas

Diseño de la portada: Julio Erazo

Primer tiraje: 200 ejemplares. Mayo 2015

Índice general

Presentación

La Sociedad Ecuatoriana de Matemática celebró sus olimpiadas un año más. Niños y jóvenes de primaria y secundaria se preparan para asistir un sábado por la mañana para resolver problemas de matemática. Muchos estuvieron acompañados por sus padres y maestros y, como en toda competencia, existen muchas emociones antes de la prueba.

Para muchos las matemáticas suelen ser intimidantes; a otros les impone un reto intelectual y un profundo deseo de encontrar una cadena de argumentos, fundados en la lógica, que les permita dar con la respuesta y salir así victoriosos de aquel laberinto simbólico, sintiendo al final esa sensación de felicidad del que ha vencido.

Sin duda las matemáticas son parte de nuestras vidas, parte de nuestra cultura. Su importancia en el día a día es trascendental. Sin darnos cuenta usamos permanentemente la lógica y complejas operaciones mentales para argumentar, entender, elegir, planificar. Las matemáticas es una herramienta en la vida que nos ayuda a tomar decisiones y a formalizar las ideas y teorías de muchas profesiones. Hay un gran espectro de gustos y motivaciones en su práctica; desde los pequeños problemas cotidianos hasta las más sofisticadas investigaciones teóricas y de aplicación en la resolución de problemas reales, en ingeniería, medicina, biología, inteligencia artificial, por mencionar algunas de una larga lista de áreas donde las matemáticas juegan un papel crucial.

Conscientes de la importancia de desarrollar aptitudes matemáticas en niños y jóvenes, en la Sociedad Ecuatoriana de Matemática cada año conformamos un equipo de profesionales de la matemática. Entre investigadores, docentes y entusiastas, se diseñan las preguntas con una perspectiva diferente a la que se suele trabajar en el aula, que no requiere muchos conocimientos, pero sí creatividad y ciertas destrezas para resolver problemas. La competencia nos provee la oportunidad de reconocer a jóvenes talentos para las matemáticas, y a que cada participante pueda explorar y desarrollar sus propias aptitudes que le dén elementos que aporten a decidir sobre su futuro profesional, que le amplien sus perspectivas respecto de compartir ideas y experiencias con otros participantes. Más allá del resultado final, o de si se alcanzó la solución de los problemas, reconocemos el gran aporte intelectual de cada participante, requerido para enfrentar los problemas matemáticos que planteamos en la Olimpiadas de la SEdeM, pues les exige un pensamiento creativo, no convencional y una actitud perseverante frente a los nuevos retos.

Este documento contiene las pruebas con sus soluciones de la XII Edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática del año 2015, que esperamos sean fuente y material de preparación para muchos jóvenes y docentes a los que les gustan e interesan las Matemáticas en su aspecto más creativo.

A nombre de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática, expreso nuestro reconocimiento y felicitación a los ganadores de esta edición de las olimpiadas y a los maestros que fueron sus guías en este apasionante recorrido de ideas abstractas, problemas y símbolos.

Finalmente, quiero agradecer a todo el equipo que hizo posible la realización de este evento y a las instituciones que nos brindaron su apoyo.

Pedro Merino

Presidente de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Cuadro de honor de la XII Edición de las olimpiadas de la SEdeM

Primer Nivel Infantil

ORO	Granja Sosa Juan Sebastián LICEO INTERNACIONAL
PLATA	Laso Hernández Martina COLEGIO AMERICANO DE QUITO
BRONCE	Hadweh Alteet Francesca Sheryn ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	Campuzano Ruilova Marisol LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Casares Bermeo Ana Carolina COLEGIO MENOR SFQ
Mención honorífica	Maya Larrea María Julia COLEGIO MENOR SFQ
Mención honorífica	Isonhood de la Torre José Gabriel CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Monesterolo Maya Juan Ignacio CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Castellón Chiriboga Bernardo José CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Ferro Izurieta Isabella Sofía COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Guerra Ehlers Micaela LICEO CAMPOVERDE

Segundo Nivel Infantil

ORO	Donoso Game María Emilia CATÓLICO JOSÉ ENGLING
ORO	Quintanilla Xavier COLEGIO INTISANA
PLATA	Urgilés Oleas Christian Santiago UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO
BRONCE	Miranda Pablo COLEGIO INTISANA
BRONCE	Díaz Palma Andrés David ISM Quito
Mención honorífica	Calle Sáenz Gabriel Esteban CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Espinosa Dávalos Estevan CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Serrano Haro Sebastián Mauricio UNIDAD EDUCATIVA SAN PIO X
Mención honorífica	Van Oordt Pérez Manuel Ignacio COLEGIO MENOR SFQ
Mención honorífica	Arias Vidal Joaquín Santiago UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR ALEMÁN STIEHLE DE CUENCA
Mención honorífica	Carpio Troya Ana Cecilia ANTONIO PEÑA CELI
Mención honorífica	Fonseca José Eduardo COLEGIO INTISANA
Mención honorífica	Cueva Cabrera Henry Mateo ANTONIO PEÑA CELI
Mención honorífica	Johann Vladimir Pasquel Montenegro UNIDAD EDUCATIVA RAFAEL SUÁREZ

Mención honorífica	Arroyo Ríos Alfonso COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Correa Jaramillo Juan Martín ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	Merchán Martínez Ana Belén UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR ALEMÁN STIEHLE DE CUENCA
Mención honorífica	Nina Donoso Juan Ignacio CATÓLICO JOSÉ ENGLING

PRIMER NIVEL JUVENIL

ORO	Mendoza Vásconez Sebastián Nicolás COLEGIO AMERICANO DE QUITO
PLATA	Ortega Isabella COLEGIO MENOR SFQ
BRONCE	Cobo Aguilera Santiago Mateo LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Rosales Arildsen Andrea COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Vallejo Pérez Sebastián LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Riofrío Lara Andrea Estefanía COLEGIO PARTICULAR EUGENIO ESPEJO
Mención honorífica	Cortéz Lemos Antonella Cristina BECQUEREL
Mención honorífica	Sáenz López Adriana Belén HONTANAR
Mención honorífica	Chávez del Salto Adrián UNIDAD EDUCATIVA WILLIAM SHAKESPEARE

Mención honorífica	Gortaire Herrera Isaac Sebastián ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Guerrero Altamirano Eduardo Humberto HONTANAR
Mención honorífica	Segovia Vásquez Joseline Carolina UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO
Mención honorífica	Zea Larrea Paúl Andrés UNIDAD EDUCATIVA SAN PIO X

Segundo Nivel Juvenil

ORO	Cortéz Lemos María Paula BECQUEREL
PLATA	Appel Proaño Paul Christoph ALEMÁN DE QUITO
BRONCE	Yépez Ruiz Jaime Sebastián SAN FRANCISCO DE IBARRA
Mención honorífica	Núñez Sánchez Felipe Alejandro LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Reyes Liut Santiago Nicolás CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Calderón Reascos Diego Daniel SAN FRANCISCO DE IBARRA
Mención honorífica	Guerrón Calero Iván Emilio UNIDAD EDUCATIVA WILLIAM SHAKESPEARE
Mención honorífica	Verdezoto Luzuriaga Felipe Esteban COLEGIO INTISANA
Mención honorífica	Arteaga Jácome Mateo CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Vela Donoso Juan Diego CATÓLICO JOSÉ ENGLING

Mención honorífica	García Paz y Miño María Caridad LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Ojeda Pillcurima Víctor Sebastián UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO
Mención honorífica	Madera Clavijo Sebastián Xavier COLEGIO INTISANA
Mención honorífica	Alvarado Moreira Roberto Andrés COLEGIO DE BACHILLERATO PARTICULAR ANTONIO PEÑA CELI
Mención honorífica	Gallegos Figueroa Natalia Adelina UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR ALEMÁN STIEHLE DE CUENCA

Tercer Nivel Juvenil

ORO	Regalado Lozano Sebastián David UNIDAD EDUCATIVA LICEO CRISTIANO DE GUAYAQUIL
PLATA	Moya Tamaríz Lucía LICEO INTERNACIONAL
BRONCE	Pule Méndez Jefferson Alexander SAN FRANCISCO DE IBARRA
BRONCE	Zumárraga Cadena Luis Felipe SAN FRANCISCO DE IBARRA
Mención honorífica	Villavicencio González Esmeralda Isabel UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO
Mención honorífica	Álvarez López Christian Andrés SAN FRANCISCO DE IBARRA
Mención honorífica	Noboa Lasso Manolo Nicolás LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Pozo Delgado Andrés Sebastián UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO

Mención honorífica	Acosta Ruiz David Sebastián ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Armendáriz Peña David Adrián ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Coloma Nicolás COLEGIO INTISANA
Mención honorífica	Miranda Terán Ángel Humberto ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Malavé Moreira Daniel Jeremías UNIDAD EDUCATIVA LICEO CRISTIANO DE GUAYAQUIL
Mención honorífica	Herrera Montero Darío Sebastián SAN FRANCISCO DE IBARRA
Mención honorífica	Navarrete Dávila Daniela Carolina UNIDAD EDUCATIVA WILLIAM SHAKESPEARE
Mención honorífica	Ramos Murcia Daniel Andrés ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Tamayo Saquicela Anghela Nicole UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO
Mención honorífica	Valencia Cifuentes Mateo Alejandro ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Paredes Montoya Santiago Miguel ISM INTERNATIONAL ACADEMY
Mención honorífica	Altamirano Rojas Giovanny Andrés LICEO DE LOJA

Primer Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. En cierto país del mundo existen únicamente monedas de 8, 3 y 1 centavo. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas que se necesita para pagar algo que cuesta 2 015 centavos en ese país?

   Solución. Para usar la menor cantidad de monedas, debes utilizar en primer lugar todas las de 8 centavos que sea posible. Para calcular esa cantidad, divides 2 015 para 8:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 5 & & 8 & \\ \cline{5-7} & 4 & 1 & & 2 & 5 & 1 \\ & & 1 & 5 & & & \\ & & & 7 & & & \end{array}$$

   Esto significa que debes utilizar 215 monedas de 8 centavos. Las 7 monedas restantes deberán ser, en su mayoría, de 3 centavos. Con dos monedas logras 6 centavos; la que falta será de un centavo.
   En resumen:

   > *el menor número de monedas es* 254*:* 251 *de* 8*,* 2 *de* 3 *y* 1 *de* 1 *centavo.* □

2. Observa la siguiente secuencia de figuras formadas por triángulos:

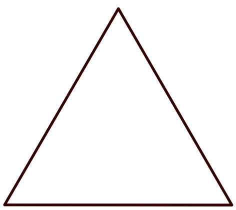


Figura 1

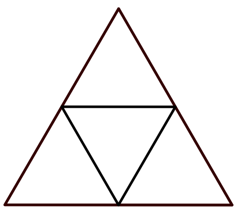


Figura 2

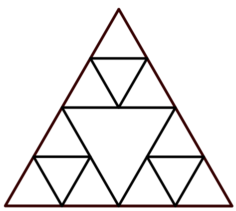


Figura 3

   En la figura 2 puedes observar que hay en total 5 triángulos.

   (a) Dibuja la figura 4 que sigue en la secuencia.

(b) ¿Cuántos triángulos habrán en la figura 4?

Solución. La figura 4 es la siguiente:

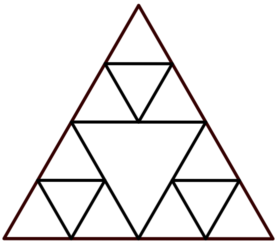


Figura 3

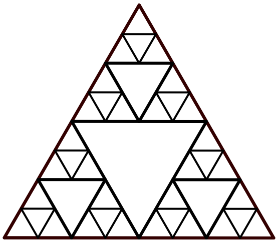


Figura 4

En la figura 2 hay 5 triángulos:

- el exterior; y
- 4 interiores.

En la figura 3 hay 17 triángulos:

$$1 + 4 + 3 \times 4 = 5 + 12 = 17,$$

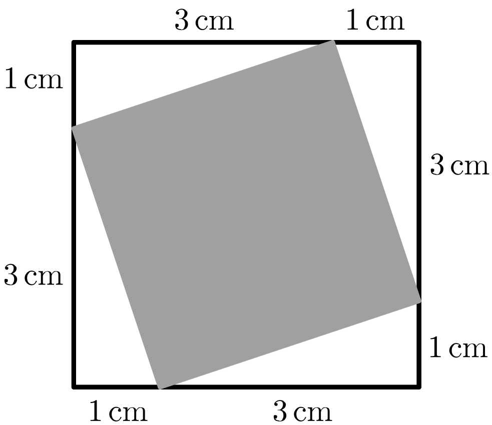
ya que

hay 4 triángulos por cada triángulo interior de la figura 2;

es decir 12 triángulos, más los 5 de la figura 1.
Por tanto, en la figura 4 habrán los 17 de la figura 3 más 3 triángulos por cada uno de los 9 triángulos interiores:

$$17 + 4 \times 9 = 1 + 4 + 3 \times 4 + 9 \times 4 = 1 + 4 + 12 + 36 = 53. \qquad \square$$

3. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



Solución. El cuadrado exterior está conformado por el cuadrado interior y cuatro triángulo congruentes. Luego, el área del cuadrado interior es la diferencia entre el área del exterior, cuyo lado mide 4 centímetros, y el área que suma la de los cuatro triángulos.
Ahora bien, en cada uno de estos, los catetos miden 3 y 1 centímetros, respectivamente; entonces, el área de cada uno de los triángulos es

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$$

centímetros cuadrados y, así, el área de los cuatro triángulos es

$$4 \times \frac{3}{2} = 6$$

centímetros cuadrados.
Finalmente, el área del cuadrado interior es igual a

$$4^2 - 6 = 10$$

centímetros cuadrados. $\square$

4. ¿A qué es igual la siguiente expresión que consiste de sumas y restas de 10 000 números?

$$10000 - 9999 + 9998 - 9997 + 9996 - 9995 + \cdots$$
$$\cdots + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$$

Solución. La expresión

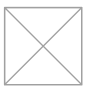
$$\overbrace{10000 - 9999 + 9998 - 9997 + 9996 - 9995 + \cdots + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1}^{10\,000 \text{ términos}}$$

puede ser escrita de la siguiente manera:

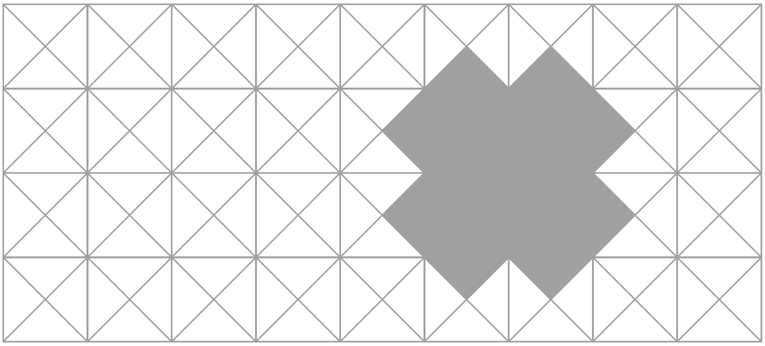
$$\overbrace{(10000 - 9999) + (9998 - 9997) + \ldots + (8 - 7) + (6 - 5) + (4 - 3) + (2 - 1)}^{5\,000 \text{ términos}}.$$

Cada término es igual a 1. Luego, la suma total es igual a 5 000. $\square$

5. El lado del siguiente cuadrado mide cinco centímetros:

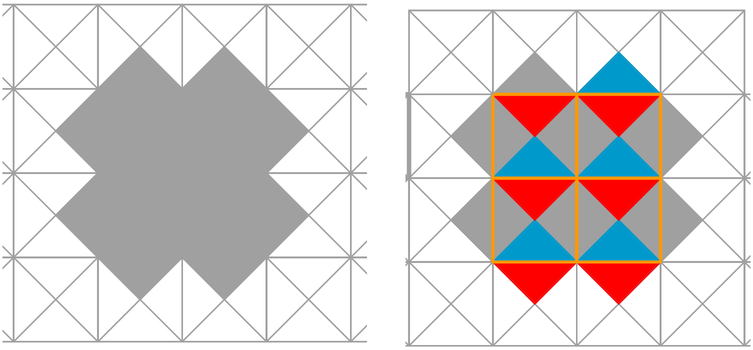


Con esta figura se construye el mural:



¿Cuál es el área de la región sombreada?

Solución. Vista con "rayos X" y coloreada, la sección sombreada es la siguiente:



Está conformada por 4 cuadrados y 8 triángulos. Pero 4 triángulos hacen un cuadrado cuyo lado mide cinco centímetros; luego, los 8 triángulos equivalen a 2 cuadrados dando un total de 6 cuadrados. Esto significa que el área de la región sombreada es igual al área de 6 cuadrados cuyo lado mide 5 centímetros:

$$6 \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$$

centímetros cuadrados. □

Segundo Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. ¿Qué número ocupa la posición 12 en la siguiente tabla?

Posición	Número
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
$\vdots$	$\vdots$
12	?
13	?
14	377
15	610

Solución. A partir de la posición 3, cada número es la suma de los números de las dos posiciones anteriores:

Posición	Número
1	1
2	1
3	$2 = 1 + 1$
4	$3 = 2 + 1$
5	$5 = 2 + 3$
6	$8 = 5 + 1$
$\vdots$	$\vdots$

Esto significa que el número de la posición 15 es la suma de los números de las posiciones 14 y 13:

$$610 = 377 + ?$$

Por lo tanto, el número de la posición 13 es el que sumado a 377 da como resultado 610; es decir, la posición 13 está ocupada por el número

$$610 - 377 = 233.$$

De donde se deduce que el número que ocupa la posición 12 es:

$$377 - 233 = 144.$$

□

2. Un agricultor sembró papas, lechugas, brócoli y zanahorias en un terreno de forma cuadrada cuya área es de 36 hectáreas. El área destinada a cada tipo de cultivo es directamente proporcional a las ventas que obtuvo el año pasado para cada uno:

   - **Papas**: 500 dólares,
   - **Lechugas**: 250 dólares,
   - **Brócoli**: 375 dólares y
   - **zanahorias**: 375 dólares.

   Calcula el área utilizada para cada uno de los tipos de cultivo.

   Solución. En primer lugar, vamos calcular la proporción que representa la venta de cada producto respecto de la venta total que es de

$$500 + 250 + 375 + 375 = 1\,500$$

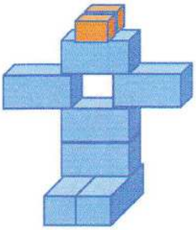
   dólares. Entonces:

   - **Proporción de venta de papas**: $\dfrac{500}{1\,500} = \dfrac{1}{3}$.
   - **Proporción de venta de lechugas**: $\dfrac{250}{1\,500} = \dfrac{1}{6}$.
   - **Proporción de venta de brócoli**: $\dfrac{375}{1\,500} = \dfrac{1}{4}$.
   - **Proporción de venta de zanahorias**: $\dfrac{375}{1\,500} = \dfrac{1}{4}$.

   Por lo tanto, como la extensión del terreno es de 36 hectáreas, el área para cada cultivo es:

   - **Área para papas**: $\dfrac{1}{3} \times 36 = 12$ hectáreas.
   - **Área para lechugas**: $\dfrac{1}{6} \times 36 = 6$ hectáreas.
   - **Área para brócoli**: $\dfrac{1}{4} \times 36 = 9$ hectáreas.
   - **Área para zanahoria**: 9 hectáreas. □

3. Con cajas de fósforos y de cereal , se construyó el robot que se muestra en la figura:



Las dimensiones de cada caja fósforos son: 3 centímetros de ancho, 4 de largo y 2 alto; las de cada caja de cereal: 6 centímetros de ancho, 12 de largo y 3 de alto. Calcula el volumen del robot.

Solución. El volumen de cada caja de fósforos es

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

centímetros cúbicos y el de cada caja de cereales:

$$6 \times 12 \times 3 = 216$$

centímetros cúbicos.
Como puedes ver, para la construcción del robot, se han utilizado 2 cajas de fósforos y 7 de cereal. Luego, el volumen del robot es:

$$2 \times 24 + 7 \times 216 = 1\,560$$

centímetros cúbicos. □

4. El primer día de clases de un nuevo año escolar se encuentran nuevamente los 31 estudiantes de un curso, quienes se saludan entre sí exactamente una vez. ¿Cuántos saludos se realizaron en total?

Solución. Los saludos de los 31 estudiantes pueden contarse de la siguiente manera:

- El estudiante número 1 saluda a los estudiantes números

$$\overbrace{2, 3, 4, 5, \cdots, 31}^{\text{30 saludos}}$$

  Es decir, él realiza 30 saludos.

- El estudiante número 2 saluda a los estudiantes números

$$\overbrace{3, 4, 5, \cdots, 31}^{\text{29 saludos}}$$

También saluda al estudiante número 1, pero este saludo ya fue contabilizado en el paso anterior.

Entonces, añade al total de saludos estos 29 del estudiante número 2.

- El estudiante número 3 saluda a los estudiantes números

$$\overbrace{4, 5, \cdots, 31}^{\text{28 saludos}}$$

También saluda a los estudiantes número 1 y 2, pero dichos saludos ya fueron contabilizados en los pasos anteriores.

Luego, añade al total de saludos estos 28 del estudiante número 3.

- De manera similar debes contar los saludos del resto de estudiantes. Por ejemplo, contabiliza los saludos que el estudiante número 20 da a los estudiantes

$$\overbrace{21, 22, \cdots, 31}^{\text{11 saludos}}$$

Son 11 saludos más.

No has contado en este paso los saludos que él hizo a los compañeros cuyos números son menores que 20, porque dichos saludos ya han sido tomados en cuenta.

- Finalmente, contabiliza los dos saludos que el estudiante número 29 hace a los compañeros 30 y 31, y el saludo del número 30 al 31.

Por tanto, el total de saludos dados entre los compañeros es:

$$S = 30 + 29 + 28 + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Para calcular S, puedes expresarlo así:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30.$$

Luego, si sumas los lados correspondientes de estas igualdades, obtienes que:

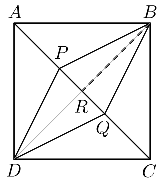
$$S + S = \overbrace{(30 + 29 + 28 + \cdots + 3 + 2 + 1)}^{\text{30 términos}} + \overbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30)}^{\text{30 términos}}.$$

Ahora agrupa los términos de la derecha de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2S &= \overbrace{(30 + 1) + (29 + 2) + (28 + 3) + \cdots + (3 + 28) + (2 + 29) + (1 + 30)}^{\text{15 términos}} \\ &= \overbrace{31 + 31 + \cdots + 31 + 31}^{\text{15 términos}} \\ &= 15 \times 31 = 465. \end{aligned}$$

Es decir, el total de saludos dados en el primer día de clases fueron 465. □

5. Los puntos P y Q dividen la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado $ABCD$ en tres segmentos de igual longitud:



El lado del cuadrado mide 1 metro. Calcula el área del rombo $BPDQ$.

Solución. Con el teorema de Pitágoras puedes calcular la longitud de la diagonal $\overline{AC}$:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

metros. Por tanto, la base PQ del triángulo PBQ mide

$$\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Observa que el área del rombo es dos veces el área del triángulo $\triangle BPQ$, cuya área es igual a

$$\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot BR.$$

Ahora bien, la altura $\overline{BR}$ del triángulo $\triangle PBQ$ es igual a la mitad de la diagonal $\overline{BD}$, que tiene la misma longitud que la diagonal $\overline{AC}$; por tanto:

$$BR = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Luego, el área del rombo es:

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3}.$$ □

PRIMER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. Se sabe que
$$ax + 2y = 2a + 1$$
y que
$$2x + ay = 3,$$
donde a es diferente de -2. Determina el valor de $x + y$.

Solución. El valor de $x + y$ es 2. En efecto, si se suman las ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned}(ax + 2y) + (2x + ay) &= (2a + 1) + 3\\ (a + 2)x + (a + 2)y &= 2a + 4\\ (a + 2)(x + y) &= 2(a + 2)\\ x + y &= 2,\end{aligned}$$

pues $a + 2 \neq 0$. □

2. Se sabe que el número 28 tiene exactamente seis divisores: 1, 2, 4, 7, 14 y 28. Determina el número de enteros positivos menores o iguales a 2 015 que tienen exactamente tres divisores.

Solución. Hay exactamente 14. En efecto, un número primo p tiene únicamente dos divisores: 1 y p. Por tanto, el número p^2 tiene tres: 1, p y p^2. Luego, los números buscados son todos los primos p tales

$$p^2 \leq 2015;$$

en otras palabras, los números requeridos son todos los primos p tales que
$$p \leq \sqrt{2015}.$$

Ahora bien, tienes que

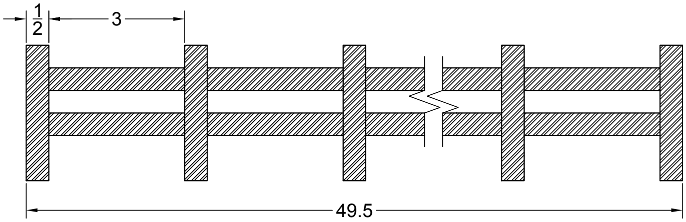
$$44^2 = 1936 \quad \text{y} \quad 45^2 = 2025,$$

entonces $p \leq 44$, de donde:

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}.$$

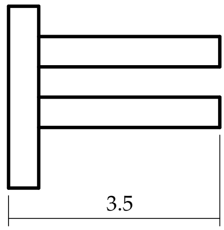
Es decir, hay 14 enteros positivos menores o iguales a 2015 que tienen exactamente tres divisores. ☐

3. Se quiere construir una cerca con postes verticales y barras horizontales como se indica en la figura:



Si cada poste vertical tiene una dimensión de $\frac{1}{2}$ pie de ancho y cada barra horizontal tiene 3 pies de largo, determina cuántas barras horizontales y cuántos postes verticales se necesitan para construir una cerca de 49,5 pies de largo.

Solución 1. Se define un *módulo* como el elemento de la cerca constituido por un poste vertical y dos barras horizontales como se muestra en la siguiente figura:



La unión de varios módulos más un poste vertical al final (derecha) debe formar una cerca de longitud 49,5 pies. Si m es el número de módulos que se utilizarán para construir la cerca, la unión de ellos deberá ser igual a 49 pies, pues habrá que descontar el poste final. Por tanto, se tiene que

$$3{,}5m = 49$$

ya que cada módulo mide 3,5 pies; así $m = 14$.

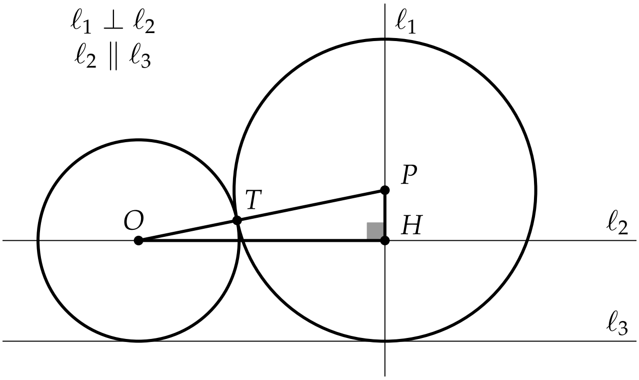
Entonces, se necesitan 15 postes verticales (incluye el poste del extremo derecho) y $14 \times 2 = 28$ barras horizontales. □

Solución 2. Sea n el número de postes verticales de la cerca; entonces el número de barras horizontales es $2(n-1)$ y la longitud total de la cerca puede ser calculada mediante la fórmula:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}n + 3(n-1) &= 49{,}5 \\
n + 6n - 6 &= 99 \\
7n &= 105 \\
n &= 15
\end{aligned}$$

Luego, se necesitan 15 postes verticales y 28 barras horizontales. □

4. Las circunferencias de centros O y P con diámetros a y b, respectivamente, son tangentes en T. Determina las longitudes de los lados del triángulo rectángulo OPH que se indica en la figura:



Solución. Nota que $OT = \frac{a}{2}$ y $TP = \frac{b}{2}$. Además, $PH = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$. Luego, por el teorema de Pitágoras aplicado en el triángulo rectángulo $\triangle OPH$, se tiene que:

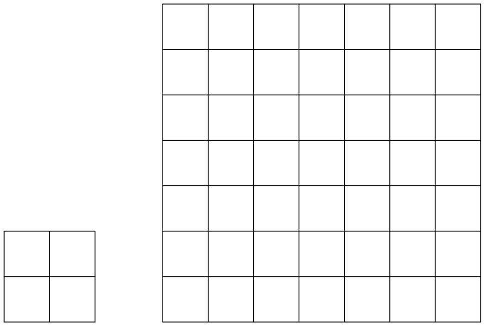
$$\begin{aligned}
OP^2 &= PH^2 + OH^2 \\
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + OH^2 \\
OH^2 &= \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{b^2-2ab+a^2}{4} \\
OH^2 &= \frac{4ab}{4} \\
OH &= \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

En resumen:

$$OP = \frac{a+b}{2}, \quad PH = \frac{b-a}{2} \quad \text{y} \quad OH = \sqrt{ab}.$$

□

5. En la cuadrícula 2×2 hay 5 cuadrados. Determina el número total de cuadrados en la cuadrícula de 7×7 que se muestra en la figura:



Solución. Si cuentas primero todos los cuadrados 7×7, luego todos los cuadrados 6×6, etcétera, obtendrás lo siguiente:

1	cuadrado de	7×7
4	cuadrados de	6×6
9	cuadrados de	5×5
16	cuadrados de	4×4
25	cuadrados de	3×3
36	cuadrados de	2×2
49	cuadrados de	1×1

Por tanto, el total de cuadrados es 140. □

Segundo Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. Sea n un número natural. Demuestra que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Solución. Procederemos por inducción matemática. Es fácil verificar que el enunciado se cumple para $n = 1$. Por otra parte, supongamos que, para un cierto n, se tiene que la igualdad

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

De aquí se concluye que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right] + (n+1)^3 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)(n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, también tenemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

de donde:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = {} & (1 + 2 + \cdots + n)^2 + \\ & + 2(1 + 2 + \cdots + n)(n+1) + (n+1)^2 \\ = {} & [(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)]^2; \end{aligned}$$

es decir:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = [1 + 2 + \cdots + n + (n+1)]^2.$$

La identidad (1) también puede ser demostrada por inducción. □

2. Sea C la curva definida por la función polar

$$r = 2 + \cos\theta.$$

Los vértices del triángulo $\triangle PQR$ son los puntos en C correspondientes a

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Calcula el área del triángulo $\triangle PQR$.

Solución. Calculemos primero las coordenadas de los vértices correspondientes a cada valor de θ.

(a) *El vértice para* $\theta = 0$: como

$$\operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \cos 0 = 1,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} r &= 2 + \cos 0 \\ &= 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

de donde las coordenadas de este vértice son:

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (3\cos 0, 3\operatorname{sen} 0) = (3, 0).$$

(b) *El vértice para* $\theta = \pi$: como

$$\operatorname{sen}\pi = 0 \quad \text{y} \quad \cos\pi = -1,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} r &= 2 + \cos\pi \\ &= 2 - 1 = 1, \end{aligned}$$

de donde las coordenadas del punto son:

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (-1, 0).$$

(c) *El vértice para* $\theta = \frac{\pi}{3}$: como

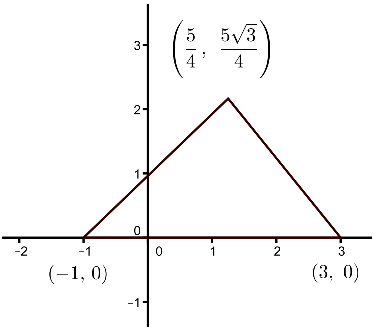
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} r &= 2 + \cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, las coordenadas del punto son:

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right).$$



Ahora bien, el área del triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de una de sus bases por la longitud de altura correspondiente:

$$\frac{1}{2}(4)\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$

3. Decimos que tres números $a < b < c$ son *equidistantes* si se cumple que
$$c - b = b - a.$$
Supón que $a < b < c$ son tres números equidistantes pertenecientes al conjunto $\{0, 1, \ldots, 12\}$. Si la suma de estos tres números es un cuadrado perfecto y el primer número es impar, determina el valor de:
$$c \cdot [a, b] \cdot [b, a],$$
donde $[a, b]$ es el número que resulta al escribir las cifras de a seguidas por las cifras de b. Por ejemplo, $[9, 31] = 931$.

Solución. Se tiene que

$$c \cdot [a, b] \cdot [b, a] = 2015.$$

En efecto, como a, b y c son equidistantes, tenemos que:

$$\begin{aligned} a+b+c &= a+b+(c-b)+b \\ &= a+b+(b-a)+b \\ &= 3b. \end{aligned}$$

Luego, como la suma de los números es un cuadrado perfecto, tenemos que

$$3b = n^2,$$

de donde sigue que

$$b = 3m^2$$

para algún número natural $m \in \mathbb{N}$.

Si $m \geq 2$, entonces $b \geq 12$ y por tanto c, que es mayor que b, no pertenece al conjunto $\{0, 1, \ldots, 12\}$. Luego, debemos tener forzosamente $m = 1$ y $b = 3$.

Considerando que $a < b$ y $a \in \{0, 1, \ldots, 12\}$, se sigue $a \in \{0, 1, 2\}$. Finalmente, como a es impar, obtenemos: $a = 1, b = 3, c = 5$ y

$$c \cdot [a, b] \cdot [b, a] = 5 \cdot [1, 3] \cdot [3, 1] = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015. \qquad \square$$

4. En un juego se tienen 21 palillos con longitudes de 1, 2, 3, ..., 21 centímetros. Ana y Pedro deben retirar por turnos un palillo cada uno, hasta que queden únicamente tres palillos. Si estos tres palillos pueden usarse para formar un triángulo, Ana gana el juego. Caso contrario, Pedro lo hace.

   Suponiendo que Ana empieza, ¿tiene algún jugador una estrategia que le permita ganar siempre?

   (Problema adaptado de *Bundeswettbewerb Mathematik 2010.1*).

Solución. Pedro tiene una estrategia ganadora.

Llamemos L al conjunto de palillos *largos*, cuya longitud es mayor que 11, y C al conjunto de palillos *cortos*, cuya longitud es menor o igual que 11. Nota que cada palillo pertenece o bien a L o bien a C. Además:

$$|C| = 11 \quad \text{y} \quad |L| = 10.$$

En cada turno, si Ana retira un palillo de L, entonces Pedro retira el palillo más largo de C y si Ana retira un palillo de C, entonces Pedro retira el palillo más corto de L.

De esta manera, en cada ronda se retiran siempre un palillo de L y un palillo de C. Tras 9 rondas el juego termina, y en este momento $|C| = 2$

y $|L| = 1$. Sean $a_1 < a_2 < a_3$ las longitudes de los tres palillos que quedaron al final del juego. Nota que la diferencia entre la longitud del palillo más corto en L y el palillo más largo en C es igual a 1 al iniciar el juego y aumenta al menos en 1 en cada ronda. Luego, al terminar tenemos $a_3 - a_2 \geq 10$. Además, como $a_1 < a_2$ y a_2 es la longitud de un palillo en C, sabemos que $a_1 \leq 10$. Luego,

$$a_1 + a_2 \leq 10 + a_2 \leq a_3$$

de donde se concluye que los tres palillos no pueden usarse para formar un triángulo. $\square$

5. Se construye una torre triangular de letras alineadas a la derecha, que tiene 2015 pisos y que incluye las siglas SEDEM de la forma en que se ilustra a continuación:[1]

```
      S
     SE
    SED
   SEDE
  SEDEM
 SEDEMS
SEDEMSE
    ...
```

   (a) ¿Cuántas veces aparece la palabra SEDEM completa **verticalmente** en la columna más a la derecha de la torre triangular?

   (b) ¿Cuántas veces aparece la palabra SEDEM completa **horizontalmente** en toda la torre?
   Nota. Tiene que aparecer la palabra completa en un mismo piso. Por ejemplo, en las filas que se muestran en la ilustración, la palabra SEDEM aparece completa 3 veces: una vez en los pisos 5, 6 y 7.

Solución.

(a) La columna tiene 2015 letras y al tener SEDEM 5 letras, la cantidad de veces que aparece es

$$\frac{2015}{5} = 403.$$

[1]Esta pregunta está basada en un ejercicio de la Olimpiada Brasilera de Matemática: Revista Eureka, Olimpíada Brasileira de Matemática, Número 30, Setembro de 2009.

(b) La palabra SEDEM aparece completa una vez en los pisos del 5 al 9, dos veces en los pisos del 10 al 14, tres veces del 15 al 19; es decir, N veces del piso $5N$ al $5(N+1)-1$.

Teniendo en cuenta que cada 5 pisos aparece una vez más la palabra, y que son 2015 pisos, el número total de ocurrencias es:

$$5(1)+5(2)+\cdots+5(402)+403=\frac{5(402)(403)}{2}+403=405418.$$

□

TERCER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. Un número natural n es *idempotente* si la potencia n^n termina con n. Por ejemplo, 11 es idempotente porque

$$11^{11} = 285\,311\,670\,6\underline{11}.$$

Demuestra que todos los números del tipo 101, 1001, 10001, etcétera son idempotentes.

Solución. Para cada $n \geq 1$, se define

$$A_n = 1\underbrace{0\cdots0}_{n}1.$$

Lo que tenemos que demostrar es que los últimos $n+2$ dígitos de $A_n^{A_n}$ son los mismos que los de A_n.
Ahora bien, por el teorema del binomio, se tiene que

$$A_n^{A_n} = \left(10^{n+1}+1\right)^{A_n} = 1 + A_n \cdot 10^{n+1} + \text{“el resto”}.$$

El “resto” es divisible por 10^{n+2}, así no influyen los últimos $n+2$ dígitos, de modo que

$$1 + A_n \cdot 10^{n+1} = 1 + 1\underbrace{0\cdots0}_{n}1 \cdot 1\underbrace{0\cdots0}_{n}.$$

Se ve inmediato que este número tiene la forma

$$\cdots 1\underbrace{0\cdots0}_{n}1 = \cdots A_n.$$

Luego A_n es idempotente. $\square$

2. Suponga que $k \geq 3$ y que x e y son dos vectores en $\mathbb{R}^k$ tales que[1]

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_k - y_k)^2 = d^2 > 0.$$

Para $r > 0$, dado en cada uno de los siguientes casos, demuestre que:

(a) Si $2r > d$, entonces existen infinitos $z \in \mathbb{R}^k$ tales que

$$\begin{aligned}(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + \cdots + (z_k - x_k)^2 &= (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + \cdots \\ &\quad + \cdots + (z_k - y_k)^2 \\ &= r^2.\end{aligned} \tag{1}$$

(b) Si $2r = d$, hay exactamente un $z \in \mathbb{R}^k$ que satisface la relación (1).

(c) Si $2r < d$, no existe ningún $z \in \mathbb{R}^k$ que cumpla con la relación (1).

Solución. Escribamos

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}.$$

Los z que satisfacen las igualdades

$$|z - x| = r \quad \text{y} \quad |z - y| = r$$

son esferas de dimensión 3 (o superior, hasta k), centradas en x y y, respectivamente, y de radio r.
Tomando v ortogonal a xy, con $|v| = 1$, formamos el punto

$$z = \frac{x + y}{2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\, v. \tag{2}$$

[1]Esta pregunta está basada en un ejercicio del libro Rudín W., Principios del Análisis Matemático, McGraw-Hill, third edition, 1964.

Ahora, por ortogonalidad, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|z-x|^2 &= \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} v - x\right|^2 \\
&= \left|\frac{y-x}{2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} v\right|^2 \\
&= \left|\frac{y-x}{2}\right|^2 + \left[r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] \cdot |v|^2 \\
&= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
&= r^2.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$|z-x| = r.$$

Análogamente, tenemos también que

$$|z-y| = r.$$

Por tanto, concluimos:

(a) Si $2r > d$, entonces hay infinitos z tales que

$$|z-x| = |z-y| = r,$$

puesto que hay infinitos v ortogonales a $x-y$, con $|v| = 1$.

(b) Si $2r = d$, entonces hay un único z y es igual a

$$z = \frac{x+y}{2}$$

(punto medio entre x y y), puesto que los z que satisfacen las igualdades

$$|z-x| = |z-y| = r,$$

son de la forma (2).

(c) Si $2r < d$, no existen z de la forma (2).

□

3. Encuentre una fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$, considerando que[2]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos conjeturar que

$$A^n = 5^{n-1}A$$

y demostrarlo por inducción.
En efecto, si $n = 1$, como $A^1 = A$, entonces

$$A^1 = 5^0 A = 5^{1-1}A.$$

Ahora, si

$$A^n = 5^{n-1}A,$$

entonces

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= 5^{n-1}A^2 \\ &= 5^{n-1}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \\ &= 5^{n-1} \cdot 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 5^n A, \end{aligned}$$

lo que completa la inducción. □

4. Sean ABC un triángulo equilátero e I su incentro. Considera tres círculos de igual radio con centros C_1, C_2 y C_3, respectivamente, tangentes dos a dos, tales que cada uno es tangente a un solo lado del triángulo ABC. Sea un círculo con centro I y radio 1 tangente a los círculos de centros C_1, C_2 y C_3. ¿Cuál es el valor del perímetro del triángulo ABC?

Solución. Sean r el radio de los círculos con centro C_1, C_2 y C_3, D el pun-

[2]Esta pregunta fue tomada de
`http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/inducao.pdf`

to de tangencia de los dos primeros, y E el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
El ángulo $\angle IDC_2$ es recto porque el segmento $\overline{DI}$ es parte del segmento $\overline{CE}$ que es tangente al círculo de centro C_2.
Los triángulos $\triangle AEI$ y $\triangle C_2DI$ son semejantes porque son rectángulos y tienen cada un ángulo opuesto por el vértice al otro (por tanto, congruentes). Tenemos también que los ángulos de los triángulos $\triangle AEI$ y $\triangle C_2DI$ son:

$$\mathrm{m}\angle DC_2I = \mathrm{m}\angle IAE = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \mathrm{m}\angle DIC_2 = \text{AIE} = \frac{\pi}{3}.$$

En el triángulo $\triangle C_2DI$ tenemos:

$$\begin{aligned} DC_2 &= r, \\ IC_2 &= 1 + r, \\ DI &= IC \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1+r}{2}. \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$r^2 + \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 = (1+r)^2,$$

de donde

$$r = 3 \pm \sqrt{12}.$$

Y como $3 < \sqrt{12} < 4$, concluimos que

$$r = 3 + \sqrt{12}.$$

Finalmente, en el triángulo $\triangle AEI$ tenemos:

$$EI = 2r + 1 = 7 + 2\sqrt{12}$$

$$AE = EI \cot \frac{\pi}{6} = (7 + 2\sqrt{12})\sqrt{3} = 12 + 7\sqrt{3}.$$

Así, el perímetro del triángulo $\triangle ABC$ es

$$6AE = 72 + 42\sqrt{3}.$$

$\square$

5. Sean m y n dos enteros positivos tales que su máximo común divisor sea igual a d; es decir: $\operatorname{mcd}(m,n) = d$, y tales que $\frac{n}{d}$ es un número par. Determina el valor de $\operatorname{mcd}(a^m + 1, a^n - 1)$ para todo

$a \in \mathbb{N}$ con $a > 1$.[3]

Solución. De $\operatorname{mcd}(m,n) = d$, podemos concluir que

$$\operatorname{mcd}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1.$$

Más aún, del hecho de que $\frac{n}{d}$ sea impar, se sigue que

$$\operatorname{mcd}\left(\frac{2m}{d}, \frac{n}{d}\right) \quad \text{o} \quad \operatorname{mcd}(2m,n) = d.$$

Luego, gracias a la identidad de Bezout[4], se tiene que la igualdad

$$\operatorname{mcd}(2m,n) = d$$

implica la existencia de dos enteros p y q tales que

$$p(2m) + qn = d.$$

Ahora bien, definamos:

$$r = \operatorname{mcd}\left(a^m + 1, a^n - 1\right).$$

Luego

$$a^m \equiv -1 \quad \text{mód } r,$$

de donde

$$a^{2m} \equiv 1 \quad \text{mód } r,$$

y que

$$a^n \equiv 1 \quad \text{mód } r.$$

De estas relaciones, se tiene que

$$a^d = a^{2pm+} \equiv 1 \quad \text{mód } r.$$

Definamos

$$s = \frac{m}{d}.$$

Luego

$$a^m = \left(a^d\right)^s \equiv 1 \quad \text{mód } r,$$

que junto con

$$a^m \equiv -1 \quad \text{mód } r,$$

[3]Esta pregunta está basada en un ejercicio del libro Mathematical lecturers of the Vietnam University and Vinh University.

[4]La identidad de Bezout establece que si a y b son números enteros tales que $\operatorname{mcd}(a,b) = d$, entonces existen enteros x y y tales que $ax + by = d$.

se sigue que
$$2 \equiv 0 \mod r.$$
Concluimos, entonces, que
$$r = 1 \quad \text{o} \quad r = 2.$$
Se ve fácilmente que si a es impar, $r = 2$; en el caso contrario, $r = 1$. $\square$

6. Sea $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función tal que[5]:

   (a) $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo x y todo y en $\mathbb{N}$ tales que $\operatorname{mcd}(x, y) = 1$.

   (b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos x y todo y en $\mathbb{N}$, primos.

   Calcular $f(2)$, $f(3)$ y $f(2015)$.

Solución. De
$$f(xy) = f(x)f(y)$$
y $x = 2$ y $y = 3$, se tiene que
$$f(6) = f(2)f(3).$$
Por otro lado, de
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
y $x = 3$ y $y = 3$, se obtiene que
$$f(6) = 2f(3)$$
por lo que
$$2f(3) = f(2)f(3),$$
de donde
$$f(2) = 2,$$
siempre que $f(3) \neq 0$.
De este resultado, se colige inmediatamente que
$$f(4) = 2f(2) = 4.$$
Ahora, definamos $a = f(3)$. Entonces
$$f(5) = f(2) + f(3) = 2 + a,$$
$$f(7) = f(2) + f(5) = 4 + a,$$
$$f(12) = f(5) + f(7) = 6 + 2a.$$

[5]Pregunta de Cao van Chung, exercises for Math exam of province Ninh Binh in Vietnam, 2009.

Por otro lado, también se tiene que

$$f(12) = f(3)f(4) = 4a,$$

de donde

$$4a = 6 + 2a;$$

es decir: $a = 3$. Luego

$$f(3) = 3, \quad f(5) = 5 \quad \text{y} \quad f(7) = 7.$$

Puesto que $2015 = 5 \times 13 \times 31$, calculemos $f(13)$ y $f(31)$. El primero se obtiene de

$$f(13) = f(2) + f(11) = 2 + f(11),$$

pero

$$f(14) = f(11) + f(3) = f(2)f(7),$$

es decir: $f(11) = 11$ y $f(13) = 13$.
Finalmente, tienes que

$$f(31) = f(33) - f(2) = f(11)f(3) - f(2) = 31.$$

Por tanto:

$$f(2015) = 2015.$$

Se puede probar, en general, que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$

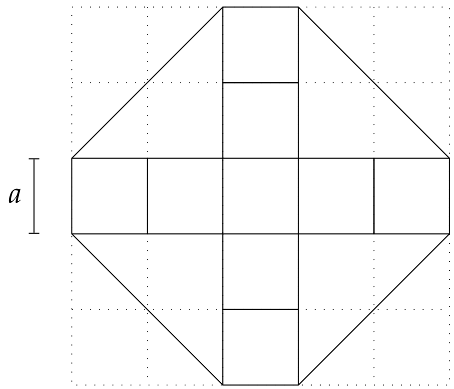
$\square$

XI Olimpiadas de la SEdeM

Primer Nivel Infantil

Preguntas

1. Queremos construir una cometa que tenga la forma que se muestra a continuación.



Haremos los cuadrados con papel brillante y los triángulos con papel celofán. El papel brillante cuesta 2 dólares por metro cuadrado, y el papel celofán cuesta 1,50 dólares por metro cuadrado. Si el lado de cualquier cuadrado mide a metros, ¿cuál es el costo de nuestra cometa?

2. Matías ha ideado una forma de escribir mensajes secretos entre su grupo de amigos. Te mostramos en la figura una carta que le envió a uno de ellos. A la izquierda está el mensaje original, y a la derecha el mismo mensaje escrito en su código secreto.

Hola _ _ _ _ _, nos vemos el miércoles.	Jqnc Rgftq, pqu xgoqu gn okgteqngu.

Hemos omitido el nombre del amigo de Matías en el mensaje original. ¿Puedes descifrarlo observando la carta secreta? Explica tu respuesta.

3. El alcalde de Quito desea mejorar la ciclovía para que los habitantes de la ciudad disfruten de sus bicicletas por el centro urbano. Para ello tiene que repavimentar algunas calles, y está examinando cuánto ha tomado esta tarea en otras ciudades. Por ejemplo, para pavimentar 2 km de calles en el centro de Bogotá, con todas las señalizaciones necesarias, 50 trabajadores han empleado 20 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán 100 obreros trabajando 10 horas al día en acondicionar los 7,5 km de la Avenida Amazonas?
4. El costo de las entradas al estadio varía según la localidad: cinco dólares en tribuna, y cuatro dólares en general. Dentro del estadio, se venden dos tipos de refrigerios: empanadas, que cuestan 2 dólares; y sánduches, a 3 dólares. He invitado a Nicolás al estadio y por las dos entradas, además de refrigerios, hemos pagado 16 dólares. Ambos fuimos a la misma localidad y pedimos el mismo tipo de refrigerio. Si la próxima vez vamos junto con ocho amigos más a la otra localidad y pedimos el otro tipo de refrigerio, ¿cuánto tendremos que gastar?
5. Los $\frac{3}{7}$ del total de los ingresos obtenidos por tu escuela son destinados a la compra de material para los laboratorios. Estos fondos deben ser divididos entre 3 laboratorios. Así, la mitad se usa para equipar el laboratorio de Computación, la tercera parte para el laboratorio de Física, y el resto del dinero para el laboratorio de Biología. Si los ingresos totales de tu escuela son de 14.000 dólares, ¿cuánto recibe el laboratorio de Biología?

Primer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. Supongamos que tenemos una lista de 3 números enteros positivos a, b y c. A éstos mismos números les organizamos en otro orden distinto x, y, z. Luego hacemos la siguiente multiplicación $(a+x)(b+y)(c+z)$. ¿El producto resultante de esta multiplicación es par o impar?

   Solución. Hay muchas formas de resolver el problema y proponemos una solución que se analiza la situación por casos:

I. Si a, b y c son todos números pares, no importa como los reordenemos, siempre las sumas $a + x$, $b + y$, $c + z$ serán pares y, por lo tanto, su producto también.

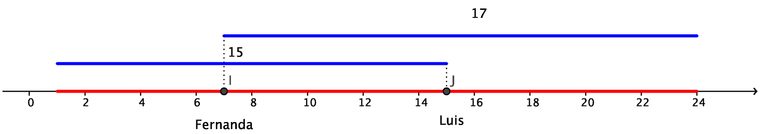
II. Supongamos que a y b son pares y c es impar. Entonces, solo uno de los factores $a + x$, $b + y$, $c + z$ es un número impar. Por lo tanto, el producto de los tres será un número par.

III. Supongamos que a es par y que b y c son impares. Luego, por lo menos uno de los factores $a + x$, $b + y$ y $c + z$ es par. Si hay una pareja del tipo "par + impar" y otra del tipo "impar + par", entonces existe una pareja del tipo "impar + impar", necesariamente. Por lo tanto, el producto es par.

IV. Supongamos que los tres números son impares; entonces, como la suma de dos impares es par, los tres factores son pares, y, por tanto, su producto también lo será. □

2. Las compañeros de clase de Luis y Fernanda se forman en una fila, uno detrás de otro. Fernanda tiene 17 niños detrás de ella (incluyendo a Luis), mientras que Luis tiene 15 niños delante de él (incluyendo a Fernanda). Si entre Luis y Fernanda hay 8 niños, ¿cuántos niños hay en total en la clase de Luis y Fernanda?

Solución. En el gráfico a continuación se representa la situación descrita:



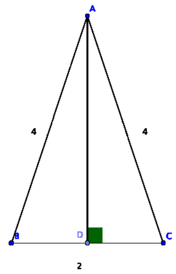
Por lo tanto, hay $6 + 1 + 17 = 24$ niños en la clase. □

3. Las medidas de los lados de un triángulo son enteros y se sabe que el perímetro es igual a 10 centímetros. ¿Cuáles son las medidas del triángulo de área máxima?

Solución. Suponga que las longitudes de los lados son a, b y c, respectivamente, donde $0 < a \leq b \leq c$ y $a + b + c = 10$. Es clave observar que $a + b > c$.

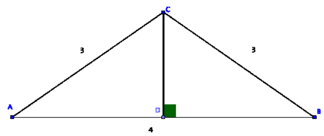
Si $a = 1$, no existe triángulo. Si $a = 2$, encontramos el triángulo con $b = c = 4$. Si $a = 3$, encontramos otro con $b = 3$ y $c = 4$. No existen más triángulos si $a > 3$. Por lo tanto, tenemos solamente dos posibilidades:

(a) El triángulo isósceles:



Encontramos la altura con el teorema de Pitágoras (triángulo ABD): $\sqrt{16-1} = \sqrt{15}$. Su área es igual a $\frac{2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$.

(b) El triángulo isósceles:



Por el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo es $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ y su área es $\frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$.

Por lo tanto, el área máxima se logra con el triángulo con lados cuyas longitudes son 3, 3 y 4, respectivamente. $\square$

4. Muestre que la suma $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ es par si n es impar y es impar si n es par.

Demostración. El razonamiento es sencillo. Si n es par, n^2 y $(n+2)^2$ son pares, mientras que $(n+1)^2$ es impar; así, su suma resulta impar. De manera similar, si n es impar, n^2 y $(n+2)^2$ son impares y $(n+1)^2$ es par; luego, su suma resulta par. $\square$

5. Se sabe que

$$\frac{p}{q+r} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q+r-s} = \frac{4}{3}.$$

Encuentre el valor de $\frac{p}{s}$.

Solución. Tomando los inversos de las ecuaciones se tiene que: $\frac{q+r}{p} =$

$\frac{5}{4}$ y

$$\begin{aligned}\frac{q+r-s}{p} &= \frac{q+r}{p} - \frac{s}{p}\\ &= \frac{5}{4} - \frac{s}{p} = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{s}{p} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

y, por lo tanto, $\frac{p}{s} = 2$. □

Segundo Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. Has recibido dos ofertas de trabajo por una semana. En la empresa A te pagan 25 dólares el día durante 7 días. En la empresa B te pagan 2 dólares el primer día y tu salario se duplica cada día hasta el séptimo. ¿En qué empresa recibirás mejor sueldo?

   Solución. En la empresa A ganaría $25 \times 7 = 175$ dólares, mientras que en la empresa B, ganaría $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^6 = 2 \times (2^7 - 1) = 254$ dólares. Por tanto, la oferta de la empresa B es mejor. □

2. Sean A, B, C en $[0, \pi]$ tales que

$$\begin{aligned}\sin A &= \cos A,\\ \sin B &= 2\cos B,\\ \sin C &= 3\cos C.\end{aligned}$$

   ¿Pueden A, B y C ser los ángulos de un triángulo?

   Solución. La respuesta es afirmativa. Si se verifica que $A + B + C = \pi$, los ángulos pueden ser los de un triángulo. Probemos que éste es el caso.
   Con las condiciones dadas, tenemos que

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C,$$

   por lo tanto, usando la fórmula de la tangente para la suma de ángulos, se obtiene $\tan(A + B + C) = 0$, de donde $A + B + C = \pi$. □

3. Supongamos que $2^p - 1$ es un número primo. Demuestra que p también es un número primo y que $2^{p-1}(2^p - 1)$, escrito en base 10, termina siempre en 6 o en 8.

Demostración. Supongamos lo contrario: p no es primo; es decir: $p = ab$. Entonces

$$\begin{aligned} 2^p - 1 &= (2^a)^b - 1 \\ &= (2^a - 1)(1 + 2^a + 2^{2a} \cdots + 2^{a(b-1)}). \end{aligned}$$

Luego $2^p - 1$ ya no sería primo, lo que es imposible. Por lo tanto, p sí es primo.
Ahora, si $p = 2$, entonces $2^{p-1}(2^p - 1) = 6$ como se afirmó. Todos los otros números primos son impares de la forma $4n + 1$ o $4n + 3$.
Si $p = 4n + 1$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{p-1}(2^p - 1) &= 2^{4n}(2 \cdot 2^{4n} - 1) \\ &= 16^n(2 \cdot 16^n - 1) \end{aligned}$$

Como el número 16^n siempre termina en 6, el número $2 \cdot 16^n - 1$ termina siempre en 1 y, por tanto, el número $2^{p-1}(2^p - 1)$ termina en 6.
Si $p = 4n + 3$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{p-1}(2^p - 1) &= 2^{4n+2}(8 \cdot 2^{4n} - 1) \\ &= 4 \cdot 16^n(8 \cdot 16^n - 1) \end{aligned}$$

Como el número $4 \cdot 16^n$ termina siempre en 4, el número $8 \cdot 16^n - 1$ termina siempre en 7 y, por lo tanto, el número $2^{p-1}(2^p - 1)$ termina en 8. ☐

4. Un cubo tiene 3 caras blancas y tres caras negras. El cubo es cortado en 3 por cada lado para obtener $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos. ¿Cuántos de esos cubitos son bicolor? (es decir, tienen al menos una cara blanca y una cara negra)

Solución. Los cubitos que salen del centro de cada cara no pueden ser bicolor porque tienen una sola cara externa. Así mismo, el cubito que se encuentra metido en el centro del cubo original no se debe contar. Entonces, tenemos a lo mucho $27 = 6 - 1 = 20$ cubitos que podrían ser bicolor. De esos 20 cubitos, 8 tienen tres caras pintadas (los de las esquinas) y los otros 12 tienen 2 caras pintadas. Ahora depende de cómo se distribuyen los colores en las caras del cubo original.

(a) Las tres caras negras tienen un vértice en común. En ese caso, las tres caras blancas también tienen un vértice en común.

Esos 2 vértices corresponden a un cubito esquinero que no es bicolor, pues tiene 3 caras negras o tres caras blancas. También hay que eliminar del conteo 3 cubitos laterales por cada color (los que comparten dos caras del mismo color y no están en las esquinas. Eso quiere decir que hay $20 - 2 - 6 = 12$ cubitos bicolor.

(b) Si las caras negras (o blancas) no tienen un vértice en común. En este caso, sólo hay que eliminar los cubos laterales que tienen dos caras del mismo color. De éstos hay dos negros y dos blancos. Entonces hay $20 - 4 = 16$ cubitos bicolor. □

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean M, N los puntos medios de $\overline{AD}$ and $\overline{BC}$, respectivamente. Demuestre que

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

si y solamente si el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento $\overline{CD}$.

Demostración. Sea P el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$. Entonces $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ son paralelos a $\overline{CD}$ y a $\overline{AB}$, respectivamente. Además,

$$MP = \frac{CD}{2} \quad \text{y} \quad PN = \frac{AB}{2}.$$

Aplicando la desigualdad triangular al triángulo $\triangle MNP$, tenemos que

$$\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = PN + MP \geq MN.$$

La igualdad se cumple si P está dentro del segmento MN; es decir, si los segmentos $\overline{MP}$, $\overline{PN}$ y $\overline{MN}$ coinciden. Puesto que

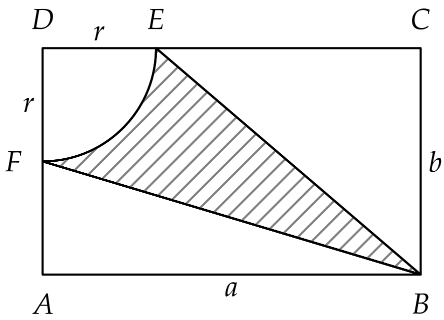
$$\overline{MP} \parallel \overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{NP} \parallel \overline{AB},$$

la condición anterior se cumple si y solo si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas. □

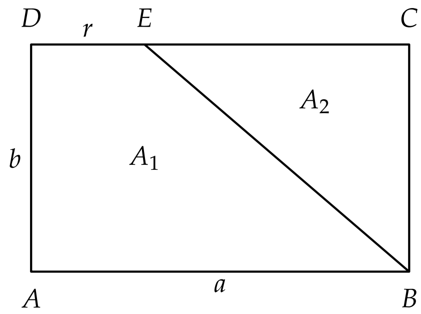
Tercer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. Halle el área rayada, sabiendo que r es tal que el segmento $\overline{EB}$ divide el área del rectángulo $ABCD$ en dos áreas proporcionales a $\frac{5}{3}$.



Solución. Determinemos en primer lugar r. Para ello, veamos el rectángulo $ABCD$:



Por hipótesis, las áreas A_1 y A_2 satisfacen la relación

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3}. \tag{.1}$$

Pero A_1 es el área del trapecio $ABED$; entonces es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases:

$$A_1 = \left(\frac{r+a}{2}\right) b. \tag{.2}$$

Por otro lado, A_2 es el área del triángulo BCE:

$$A_2 = \frac{(a-r)b}{2}. \tag{.3}$$

Entonces, de las igualdades (.1), (.2) y (.3), se sigue que

$$\frac{\frac{r+a}{2} \cdot b}{\frac{(a-r) \cdot b}{2}} = \frac{5}{3},$$

lo que implica que

$$r = \frac{a}{4}.$$

Podemos ya calcular el área rayada; ésta es igual a la diferencia entre el área del trapecio $ABED$ y las áreas de un cuarto del área del círculo de radio r y del triángulo ABF:

$$\text{Área rayada } = \frac{a+r}{2} \cdot b - \left[\frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{a(b-r)}{2}\right] = \frac{(a+b)r}{2} - \frac{1}{4}\pi r^2. \quad \square$$

2. Una función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **convexa** si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in [0,1]$ si se tiene que

$$f([1-\lambda]x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Una función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **monótona creciente** si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ se verifica la desigualdad

$$f(x) \leq f(y).$$

Sea $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y monótona creciente. Pruebe que la función compuesta $h \circ g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa.
Muestre, a través de un ejemplo, que la monotonía de h es indispensable para la convexidad de la composición.

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$; por la convexidad de g, se tiene:

$$g([1-\lambda]x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

Luego, por la monotonía y convexidad de h, respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} h\left(g([1-\lambda]x + \lambda y)\right) &\leq h\left([1-\lambda]g(x) + \lambda g(y)\right) \\ &\leq (1-\lambda)h(g(x)) + \lambda h(g(y)). \end{aligned} \quad \square$$

3. ¿Cuántos números hay entre 1 y 1 000 tales que son divisibles por 3, pero ninguno de sus dígitos son divisibles por 3?

Solución. Hay en total 108. En efecto: entre 1 y 99 hay 18, lo que es fácil verlo. Entre 100 y 1 000 hay 90.
Para ello, supongamos que $n = 100a + 10b + c$ es un número con dicha propiedad. Luego a puede ser uno de los siguientes dígitos: 1, 2, 4, 5, 7, 8.
Fijemos un valor de a. Luego hay que sumar los dígitos: $a + b + c$; esta suma debe ser divisible por 3. Si ahora fijamos b, tenemos dos posibilidades:

- $a+b$ es divisible por 3. Si es así, c debe ser 0. Por lo tanto, existen $6 \times 3 = 18$ casos en total.
- $a+b$ no es divisible por 3. Hay, entonces, 24 pares (a,b) diferentes. En este caso c puede tomar 3 valores distintos: 1, 4, 7 ó 2, 5, 8, dependiendo de cuál es el residuo al dividir $a+b$ por 3. Tenemos, entonces, en total $24 \times 3 = 72$.

Por lo tanto, el total de números entre 100 y 1 000 con la propiedad exigida es:

$$72 + 18 + 18 = 108. \qquad \square$$

4. Demuestre que la suma de todos los números n (no necesariamente enteros) tales que

$$\frac{\left(x^{3n}\right)^n}{\left(x^2\right)^n} = x^5$$

es igual a $\frac{2}{3}$.

Demostración. Usando reglas de exponentes, tenemos que

$$\frac{\left(x^{3n}\right)^n}{\left(x^2\right)^n} = \frac{3^{3n\times n}}{x^{2n}} = x^{3n^2-2n} = x^5.$$

Por lo tanto, si igualamos los exponentes, obtenemos la siguiente ecuación para n:

$$3n^2 - 2n - 5 = 0.$$

Finalmente, para cualquier polinomio de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

la suma de sus las raíces es igual a $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$. Luego, la suma pedida es igual a $\frac{2}{3}$. $\square$

5. Sea f una función definida en $[-1,1]$ que toma valores reales tales que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = (1+x)f(1-x),$$

para $x \neq 0$. Encuentre los valores a, c y d en $[-1,1]$ tales que

$$f(a) + f(d) \neq 0 \neq f(0) \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} f(a) & f(-a) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4f(0)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(-a) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} f(a)^2 + f(-a)f(c) & f(a)f(-a) + f(-a)f(d) \\ f(a)f(c) + f(c)f(d) & f(d)^2 + f(-a)f(c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(a)^2 + f(-a)f(c) & f(-a)[f(a) + f(d)] \\ f(c)[f(a) + f(d)] & f(d)^2 + f(-a)f(c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4f(0)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$f(-a)[f(a) + f(d)] = 0, \quad f(c)[f(a) + f(d)] = 0 \quad \text{y} \quad f(d)^2 + f(-a)f(c) = 0.$$

De donde, como $f(a) + f(d) \neq 0$, se sigue que

$$f(-a) = f(c) = f(d) = 0 \quad \text{y} \quad f(a)^2 = 4f(0)^2.$$

Por tanto, buscamos a, c, d tales que $-a, c, d$ son raíces de f. Se observa que $f(-1) = 0$; en consecuencia,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3f(-1) = 0.$$

Finalmente, $f(1) = 2f(0)$; por lo tanto $a = 1, c = -1, d = 1/2$. □

IX OLIMPIADAS DE LA SEdeM

Primer Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. Si un octavo de un número es igual a $\frac{3}{2}$, ¿cuánto vale la mitad de ese número?

   a) 8 *b)* 10 *c)* 6 *d)* $\frac{7}{2}$ *e)* Ninguna

   Solución. La respuesta es *c*), pues

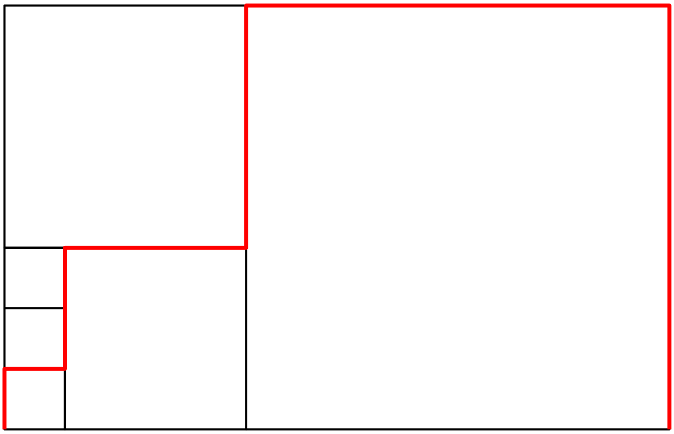
   $$\frac{8}{2} \times \frac{3}{2} = 4 \times \frac{3}{2} = 6. \qquad \square$$

2. ¿Cuántos triángulos determinan los vértices de un polígono regular de seis lados?

   a) 12 *b)* 18 *c)* 20 *d)* 22 *e)* Ninguna

   Solución. La respuesta es la opción *c*): 20 triángulos, que es el número de combinaciones de tres elementos tomados de un total de seis. $\square$

3. En la siguiente figura, todas las internas son cuadrados. La longitud del lado del cuadrado más pequeño es de 2 centímetros. Calcula la longitud de la línea roja.



a) 44 *b)* 46 *c)* 48 *d)* 50 *e)* Ninguna

Solución. La opción correcta es *d*). En efecto, la longitud del lado del cuadrado más grande es 14 centímetros. La longitud del lado del cuadrado algo más pequeño es 8 centímetros. La longitud del siguiente: 6 centímetros. Los otros tienen un lado de longitud 2 centímetros. Entonces, la longitud de la línea roja es:

$$2 \times 14 + 8 + 6 + 4 \times 2 = 28 + 8 + 6 + 8 = 50$$

centímetros □

4. Un cuadrado cuyo lado mide 5 centímetros es divido, por medio de rectas paralelas a sus lados, en 25 cuadrados idénticos. ¿Cuántas rectas se requirieron para realizar la división?

a) 10 *b)* 12 *c)* 9 *d)* 8 *e)* Ninguna

Solución. La respuesta es la opción *d*). Se necesitan 4 rectas verticales y 4 rectas horizontales. □

5. A una cantidad le sumas el 20 % de ella misma, y la cantidad resultante le restas el 20 % de sí misma. ¿Qué porcentaje de la cantidad que había originalmente quedó?

Solución. Para facilitar los cálculos, supongamos que la cantidad original es 100. Si a ésta se le suma el 20 % de sí mismo, se obtiene 120. Y, como el 20 % de 120 es 24, queda $120 - 24 = 96$ % del original. □

6. Expresa el resultado de sumar:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 20 + 21 + 22$$

como el producto de dos números.

Solución. Si sumas los dos números en los extremos, obtienes 23:

$$1 + 22 = 23.$$

Si sumas el segundo desde la izquierda con el segundo desde la derecha, también obtienes 23:

$$2 + 21 = 23.$$

Hay 11 de estas sumas. Entonces:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 20 + 21 + 22 = 11 \times 23. \qquad \square$$

7. En tu escuela se va a organizar un campeonato deportivo. Se inscriben siete equipos y jugarán "todos contra todos"; es decir, cada equipo deberá enfrentarse una vez contra cada uno de los otros equipos. ¿Cuántos partidos en total se jugarán en el campeonato?

Solución. El primer equipo deberá jugar seis partidos. El segundo equipo, jugará cinco partidos (pues ya jugó con el primero). Mediante el mismo argumento, el tercer equipo jugará cuatro partidos. Así, el número total de partidos que se jugarán son: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. $\square$

Segundo Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. En un bosque, cuyos árboles son utilizados para la fabricación de papel, al final de cada año, se corta un tercio de los árboles y se siembra el doble de la cantidad de árboles que han quedado. ¿Cuántos árboles se tendrá en el bosque al iniciar el tercer año si habían 27 árboles inicialmente?

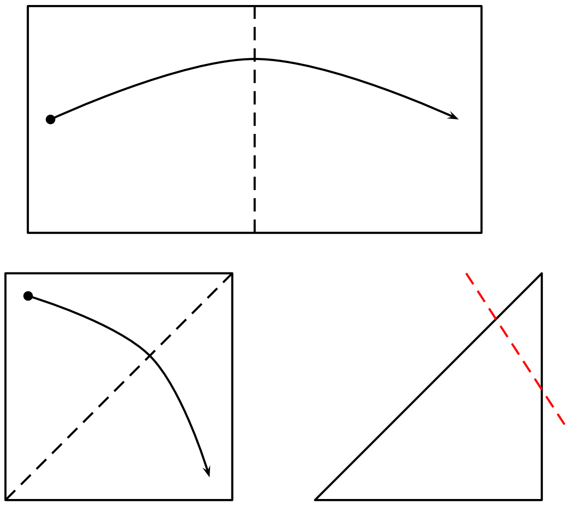
a) 54 *b)* 72 *c)* 108 *d)* 144 *e)* Ninguna de las anteriores

Solución. La opción correcta es *b*).

En efecto, al inicio hay 27 árboles. Al final del primer año, se corta un tercio, 9 árboles; quedan 18. Se siembra el doble de lo que queda; es decir, se siembran 36 árboles, lo que dan un total de 54 árboles al inicio del segundo año.

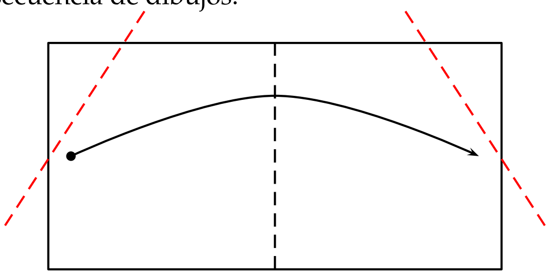
Al final del segundo año se corta un tercio: 18 árboles; quedan 36, y se siembran 72 árboles. Por lo tanto, al inicio del tercer año en el bosque hay 108 árboles. □

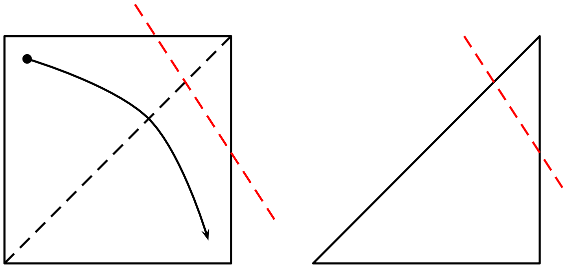
2. Una hoja de papel se dobla por la mitad como se indica en dibujo. Luego se dobla por su diagonal. Finalmente, con una tijera, se recorta por la línea punteada de color rojo mostrada en el dibujo, y se desecha la parte superior más pequeña. El pedazo que queda es desdoblado. ¿Cuántos lados tiene la figura obtenida?



a) 3 *b)* 4 *c)* 5 *d)* 6 *e)* 7

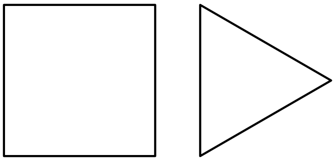
Solución. La opción correcta es la *d*), como se puede apreciar en la siguiente secuencia de dibujos:

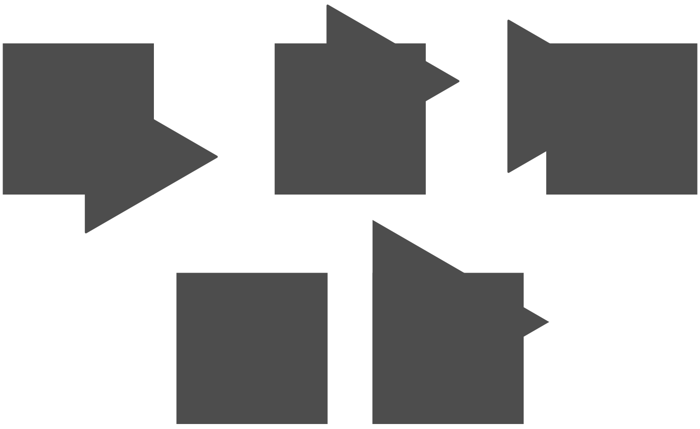




□

3. El cuadrado y el triángulo de la figura tienen el mismo lado y pueden moverse y solaparse de varias formas. Elija una de las siguientes sobras que no pueden ser resultado del movimiento y solapamiento de ambas figuras.





a) La primera *b)* La segunda *c)* La tercera *d)* La cuarta *e)* La quinta

Solución. La opción correcta es *e*). □

4. Considera las siguientes afirmaciones:

   (a) Todos los conejos saltan.

(b) Todos los conejos tienen orejas largas.

(c) La mascota de Juan salta y tiene orejas largas.

¿Cuál de los siguientes enunciados son verdaderos?

a) Es un conejo.

b) Es un canguro.

c) No necesariamente es un conejo.

d) Es un gato.

e) Ninguna de las anteriores.

Solución. La respuesta es la opción *c*). En efecto, la mascota de Juan podría ser un perrito de orejas largas y que está saltando frecuentemente, porque es muy juguetón. □

5. Dados los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, llene cada uno de los cuadros de modo que la suma en cada fila, en cada columna y en cada diagonal sea igual a los números indicados en las celdas del borde de la tabla. Los números dados no se pueden repetir; es decir, pueden ser usados únicamente una vez.

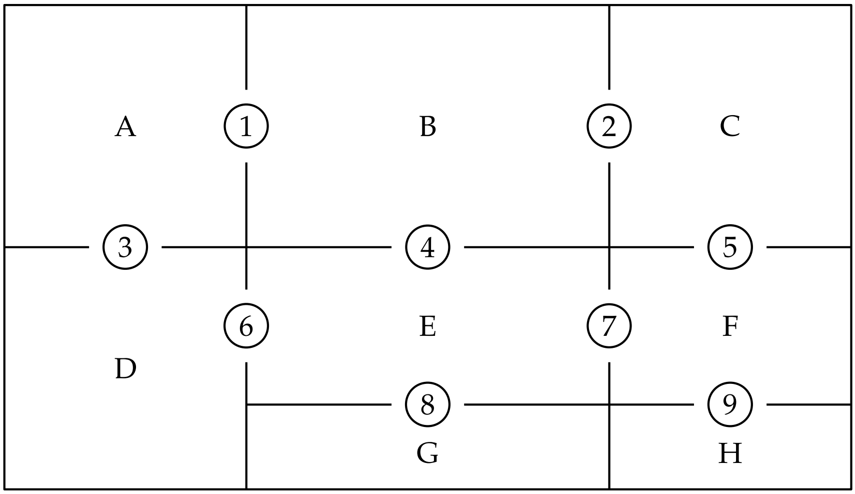
14	19	20	6	20
13				13
18				18
14				14
20	19	20	6	14

Solución. La tabla sería:

14	19	20	6	20
13	**4**	**6**	**3**	13
18	**7**	**9**	**2**	18
14	**8**	**5**	**1**	14
20	19	20	6	14

□

6. Un museo tiene ocho salas: A, B, C, D, E, F, G, H como se muestra en la figura:



Los números encerrados en círculo indican las puertas que hay en las salas. Para vigilar, se colocan guardias en algunas puertas. Cada guardia debe custodiar las salas aledañas a la puerta en la que ha sido ubicado. Por ejemplo, el guardia de la puerta 1 deberá custodiar las salas A y B. ¿Qué número de guardias es suficiente para que estén custodiadas todas las salas?

Solución. En las puertas ocho y nueve es obligatorio colocar guardias, ya que de lo contrario las salas G y H se quedarían sin custodia. Si se colocan guardias en las puertas 1 y 5, el resto de salas quedan custodiadas. Por lo tanto, es suficiente contar con cuatro guardias para vigilar el museo completamente. □

7. En el campeonato deportivo de tu escuela están inscritos seis equipos. El sistema de este torneo es el de "todos contra todos"; es decir, cada equipo deberá enfrentarse una vez contra cada uno del resto. Cada sábado juegan todos los equipos. Con la ayuda de una tabla, indica el número de sábados necesarios para que se realicen todos los partidos, y para cada sábado, escribe qué equipos se enfrentarán entre sí.

Solución. Hay varias soluciones. Una de ellas es:

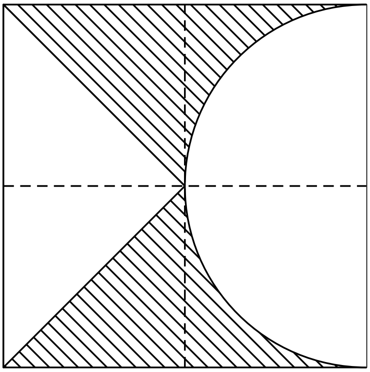
Sábado	Partidos		
Primero	1-6	2-5	3-4
Segundo	1-5	2-4	3-6
Tercer	1-4	2-3	5-6
Cuarto	1-3	2-6	4-5
Quinto	1-2	4-6	3-5

Cada número, indica un equipo. □

Primer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. En la figura, se muestra un cuadrado de lado a, con sus ejes de simetría, además un semicírculo y un triángulo construidos dentro de él.



El valor del área rayada es:
a) $\dfrac{\pi-3}{4}a^2$ *b)* $\dfrac{6-\pi}{8}a^2$ *c)* $\dfrac{3-\pi}{4}a^2$ *d)* $\dfrac{\pi-3}{8}a^2$ *e)* Ninguna de las anteriores.

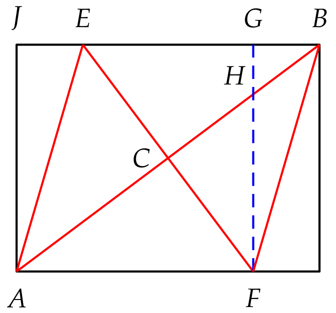
Solución. La respuesta correcta es la opción *b)*. En efecto, el área rayada es el área del cuadrado menos el área del semicírculo y del área del triángulo. Entonces, el área rayada es igual a:

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(6-\pi)}{8}.$$

□

2. Una hoja de papel de forma rectangular de dimensiones 3 por 4 unidades es doblada de tal manera que dos esquinas diagonalmente opuestas coincidan. Halle la longitud del doblez.
a) $\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* $\frac{15}{4}$ *d)* $\frac{20}{3}$ *e)* Ninguna de las anteriores

Solución. La respuesta correcta es la opción *c)*. En el siguiente dibujo se muestran los triángulos que se forman una vez realizado el doblez, donde el doble está representado por el segmento $\overline{EF}$ (la esquina A coincidió con la esquina B):



En primer lugar, hay que observar que la diagonal del rectángulo, $\overline{AB}$ y la línea de doblez, $\overline{EF}$, se intersecan en ángulo recto. En efecto, dado que el doblez se obtuvo al llevar le vértice A sobre el vértice B, entonces tenemos que

$$AC = BC \quad \text{y} \quad AE = EB.$$

Por lo tanto, el triángulo $\triangle AEB$ es isósceles y $\overline{EC}$ es la mediana respecto del vértice E. Por lo tanto, $\overline{EC}$ es también altura (y mediatriz). Por lo tanto, el ángulo $\angle BCF$ es recto, como se dijo.
De aquí se deduce fácilmente que los ángulos $\angle JBA$ y $\angle GFE$ son congruente. Por lo tanto, los triángulos $\triangle JBA$ y $\triangle GFE$ son semejantes. Se deduce, entonces que

$$\frac{EF}{FG} = \frac{AB}{BJ};$$

es decir:

$$\frac{EF}{3} = \frac{5}{4},$$

ya que las dimensiones del rectángulo son:

$$AJ = 3, \quad JB = 5 \quad \text{y} \quad AB = 5,$$

por el teorema de Pitágoras.
Por lo tanto:

$$EF = \frac{15}{4}$$

como se dijo. de donde es fácil establecer la relación de $\frac{3}{l} = \frac{4}{5}$ donde l es la longitud del doblez. $\square$

3. Una fábrica de tubos de metal produce tubos de longitud 2,20 metros, que se utilizan con propósitos de embellecimiento arquitectónico. Bajo pedido especial, la fábrica puede cortar los tubos

producidos en longitudes más pequeñas, pero, por cada corte, se pierden 2 milímetros de longitud del tubo.
Recientemente, la fábrica recibió un pedido interesante: tubos de igual longitud, medida en centímetros, y ésta igual a un número entero, de mínimo 10 centímetros y como máximo, 14. ¿De qué longitud deberían ser los tubos para que el desperdicio sea mínimo?
Observe que el desperdicio es todo lo que se pierde por el corte y los pedazos de tubo que luego de los cortes no tengan la longitud elegida.

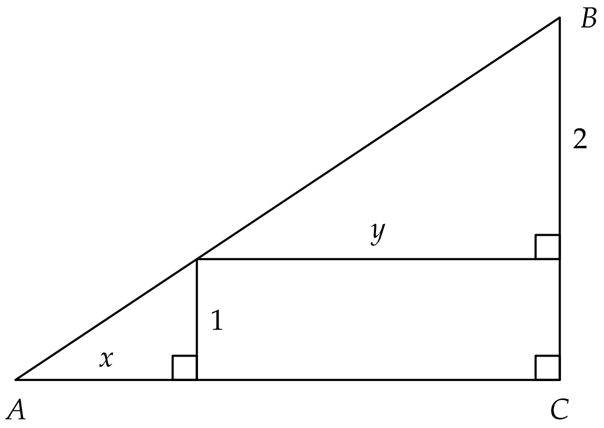
a) 10 *b)* 11 *c)* 12 *d)* 13 *e)* Ninguna de las anteriores

Solución. La respuesta correcta es la opción *c)*. En efecto, en primer lugar, vamos a considerar todas las longitudes en milímetros, pues, en cada corte se pierden 2 milímetros. Así, si se decidiera que la longitud es 10 centímetros, en cada corte se consideran 102 milímetros.
Al dividir 2 200 por 102, obtendremos el mayor número de tubos cuya longitud es igual a 10 centímetros. El residuo de la división medirá el desperdicio. Por lo tanto, lo que debemos hacer es, calcular los residuos de dividir 2 200 por 102, 112, 122, 132 y 142 y comparar los residuos correspondientes; el menor residuo nos dirá de qué tamaño tiene que ser el tubo solicitado:

Longitud con desperdicio	Residuo
102	58
112	72
122	4
132	88
142	70

Como se puede ver en la tabla, la longitud que menos desperdicio produce es 12 centímetros. □

4. Si
$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2}=5,$$
donde x y y son las longitudes de los segmentos mostrados en el dibujo. Calcule el valor de $x+y$.



a) 0 *b)* $\sqrt{x^2+y^2}$ *c)* 4 *d)* 5 *e)* Ninguna de las anteriores.

Demostración. La respuesta correcta es la opción *c)*. Observe que en el triángulo ABC, el cateto $\overline{BC}$ mide 3 unidades. Y, de la igualdad

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2}=5$$

se deduce que la hipotenusa $\overline{AB}$ mide 5 unidades. Por lo tanto, el cateto $\overline{AC}$ mide 4, de donde valor de $x+y=4$. □

5. Si n es un número natural par, n siempre se puede escribir como $n=2k$, donde k es también natural.
   (a) ¿Es la suma de dos números naturales pares siempre un número par? Ofrezca una demostración que justifique su respuesta.
   (b) ¿Es posible que el producto de dos números naturales $m \times n$ sea un número par, a pesar de que m y n no lo sean? Ofrezca una demostración que justifique su respuesta.

Solución. La suma de dos números pares siempre es un número par, pues si n y m son pares, entonces, por la definición de número par, tenemos que

$$n=2k \quad \text{y} \quad m=2l,$$

con k y l números naturales. Entonces:

$$n+m=2(k+l).$$

Y, como k y l son números naturales, también lo es $k+l$. Por lo que $n+m$ satisface la definición de par.
Si m y n no son números pares, deben ser impares; es decir:

$$m=2p+1 \quad \text{y} \quad n=2q+1.$$

con p y q números naturales. Entonces:

$$m \times n = (2p+1) \times (2q+1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2(2pq - p - q) + 1.$$

De donde se concluye que $m \times n$ es un número impar; es decir, no es par. □

6. Demuestre que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - 1} < 4.$

   Demostración. Como $\sqrt[3]{3} - 1$ es un número positivo, la desigualdad dada es equivalente a

   $$1 < 4\sqrt[3]{3} - 4,$$

   la que, a su vez, es equivalente a

   $$5 < 4\sqrt[3]{3},$$

   y esta es equivalente a

   $$125 < 64 \times 3 = 192.$$

   Y como esta es verdadera, la primera también lo es. □

7. Exprese el número 10 como suma de varios números positivos, de modo que el producto de los números utilizados sea máximo.

   Solución. La idea es mostrar que el número 3 es el más eficiente para maximizar productos. Así, si expresamos

   $$10 = 3 + 3 + 3 + 1,$$

   el producto resulta en 27. Ahora, si agrupamos un tres con el uno, obtenemos:

   $$10 = 3 + 3 + 4,$$

   cuyo producto da 36, y éste es el número máximo.
   Este análisis puede mejorarse o generalizarse para demostrar la eficiencia del tres en cualquier caso. □

Segundo Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. En una clase hay igual número de hombres que de mujeres. Durante el feriado de carnaval, la cantidad de alumnos que salieron de viaje fue el doble de la cantidad de alumnos que se quedaron en casa. Si el

curso tiene 30 estudiantes y 12 hombres salieron de viaje en carnaval, ¿cuántas mujeres se quedaron en casa?

a) 15 *b)* 10 *c)* 7 *d)* 0 *e)* Ninguna de las anteriores.

Solución. La respuesta correcta es la opción *c*). Si x es la cantidad de alumnos que se quedaron en casa durante el feriado de carnaval, entonces el número de alumnos que salieron es $2x$. Como en total hay 30 alumnos, se sigue que $x + 2x = 30$ y $x = 10$. Es decir, 10 alumnos se quedaron en casa y 20 salieron de viaje. De éstos, 12 son hombres y las restantes 8 son mujeres. Por otra parte, se conoce que hay igual número de hombres y de mujeres. Luego, en el grupo hay 15 mujeres y si 8 salieron de viaje entonces 7 se quedaron en casa. □

2. En la siguiente expresión, se conoce que $x \notin \{0, -a\}$.

$$\frac{(x+a)^3 - (x^3 + a^3)}{x+a} = 15x.$$

¿Cuánto vale a?

a) 0 *b)* 1 *c)* -5 *d)* 5 *e)* Ninguna de las anteriores.

Solución. La respuesta correcta es la opción *d*). Conocemos que:

$$\frac{(x+a)^3 - (x^3 + a^3)}{x+a} = \frac{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 - x^3 - a^3}{x+a} = \frac{3ax(x+a)}{x+a}.$$

Si $x \neq a$, podemos simplificar el factor $x + a$ de la última expresión y la ecuación original toma la forma:

$$3ax = 15x.$$

Como $x \neq 0$, podemos dividir a ambos lados por $3x$, y obtenemos el resultado señalado. □

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones da como resultado un número divisible para tres, para cualquier número natural n?

a) n^2 *b)* $n^4 - n^2$ *c)* n^3 *d)* $2n$ *e)* Ninguna de las anteriores.

Solución. La respuesta correcta es la opción *b*). Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$n^4 - n^2 = n^2(n+1)(n-1).$$

Y, como al menos uno de los tres números consecutivos $n - 1$, n y $n + 1$ debe ser divisible para 3, se sigue que el producto es divisible para 3.

Por otra parte, n^2, n^3 y $2n$ son divisibles para 3 si y sólo si n es divisible para tres. Luego estos tres números no serán divisibles para 3 para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4. En un experimento se estudia el cultivo de una cierta especie de planta en un invernadero. Se ha determinado que, durante una semana, la mitad de los individuos mueren, mientras que cada individuo sobreviviente se reproduce y da lugar a dos nuevos individuos. Si la población inicial es de 128 individuos, ¿cuántas semanas transcurrirán hasta que se sobrepase la población de 1000 individuos por primera vez?

a) 4 *b)* 5 *c)* 6 *d)* 7 *e)* Ninguna de las anteriores.

Solución. La respuesta correcta es la opción *c*). En efecto, nombremos con P_0 la población inicial de plantas. Entonces, al finalizar la primera semana, hay

$$\frac{P_0}{2} + P_0$$

individuos, pues durante la primera semana han muerto $P_0/2$ individuos (la mitad de la población inicial) y cada uno de los $P_0/2$ sobrevivientes se ha reproducido dando origen a 2 nuevos individuos. En resumen, al finalizar la primera semana, hay

$$\frac{3}{2}P_0$$

individuos.
Durante la segunda semana mueren $\frac{3}{4}P_0$ individuos y nacen $\frac{3}{2}P_0$; es decir, la población al final de la segunda semana es de

$$\frac{3}{4}P_0 + \frac{3}{2}P_0 = \frac{9}{4}P_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 P_0$$

individuos.
Un razonamiento similar, nos llevará que, al finalizar la tercera semana, la población alcanzará

$$\frac{9}{8}P_0 + \frac{9}{4}P_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 P_0$$

individuos.
Generalizando los resultados anteriores, se obtiene que, al finalizar la n-ésima semana, la población alcanzará

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n P_0$$

individuos.
Luego, para encontrar el número de semana en cuyo final la población supere, por vez primera, los 1 000 individuos, debemos encontrar el menor n tal que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n P_0 > 1\,000;$$

es decir, el menor n tal que

$$\frac{3^n}{2^n} \times 2^7 > 1\,000.$$

A partir de esta desigualdad, se ve que el primer número que satisface esta desigualdad es el 6, pues, si $n = 5$, entonces

$$\frac{3^5}{2^5} \times 2^7 = 243 \times 4 = 972 < 1\,000$$

y

$$\frac{3^6}{2^6} \times 2^7 = 729 \times 2 = 1\,458 > 1\,000.$$

□

5. Una nave espacial se dirige desde la Tierra hacia el planeta MG2012, que orbita una estrella lejana. La tecnología avanzada de la nave le permite cubrir durante el primer año el 80 % de la distancia a recorrer. Sin embargo, en ese momento se presenta un problema con el sistema de propulsión lo que causa una disminución permanente de la velocidad de crucero, de tal forma que cada año se puede avanzar únicamente un quinto de la distancia recorrida durante el año anterior. ¿Cuántos años tardará la nave en llegar a su destino?

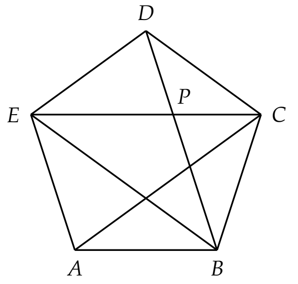
Demostración. Sea x la distancia que separa a la Tierra del planeta MG2012. Durante el primer año, la nave espacial recorre el 80 % de esta distancia; es decir, $\frac{4}{5}x$. En el segundo año, la nave recorrerá un quinto de la distancia recorrida en el año anterior, lo que es igual a $\frac{1}{5}\frac{4}{5}x$. De manera similar, en el tercer año la nave recorrerá una distancia igual a $\frac{1}{5}(\frac{1}{5}\frac{4}{5}x) = (\frac{1}{5})^2\frac{4}{5}x$. Al cabo de n años, la nave recorrerá en total una distancia igual a:

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\frac{4}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5}x + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\frac{4}{5}x &= \frac{4}{5}x\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^i \\ &= \frac{4}{5}x\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} \\ &= x\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Puesto que $1 - (\frac{1}{5})^n < 1$ se cumple para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, la expresión anterior es siempre menor a x y, por tanto, ¡la nave nunca llegará a su destino! □

6. Cada diagonal de un pentágono convexo $ABCDE$ lo corta en un triángulo de área igual a 1. Calcule el área del pentágono $ABCDE$.

Solución. Dado el pentágono que se presenta en la siguiente figura.



Por las hipótesis del problema, sabemos que $S_{ABE} = S_{ABC}$, luego, como estos triángulos tienen la base común $\overline{AB}$, se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$. De manera similar se prueba que las restantes diagonales también son paralelas a sus lados opuestos correspondientes.
Sea P el punto de intersección de $\overline{BD}$ y $\overline{EC}$. Tenemos que

$$S_{EPB} = S_{ABE},$$

porque $ABPE$ es un paralelogramo y $\overline{EB}$ es su diagonal. Entonces

$$S_{EPB} = 1.$$

Además, si $x = S_{BPC}$, entonces

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EPB} + S_{EDC} + S_{BPC} = 3 + x.$$

Además, como $BCDE$ es un trapecio y $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ sus diagonales, entonces se tiene que los triángulo $\triangle BPC$ y $\triangle EPD$ son congruentes; por lo tanto:

$$S_{EPD} = x.$$

Por otro lado, como los puntos D, P y B son colineales, entonces

$$\frac{S_{BPC}}{S_{DPC}} = \frac{BP}{DP} = \frac{S_{EPB}}{S_{EPD}},$$

entonces

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x},$$

de y luego $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, lo que implica

$$S_{ABCDE} = \frac{\sqrt{5}+5}{2}. \qquad \square$$

7. Una fila de butacas de la sala de un teatro que cuenta con 80 asientos está completamente llena de espectadores, de los cuales 45 son mujeres. Muestre que hay al menos dos mujeres sentadas en asientos que están separados exactamente por 8 butacas. Por ejemplo, en las butacas 13 y 22 están sentadas mujeres; o en las posiciones 68 y 77.

   Solución. Consideremos el conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_{45}\}$ que contiene los números de las butacas ocupadas por mujeres. Debemos mostrar que existen por lo menos dos números a_i y a_j tales que $a_i - a_j = 9$. Para ello, definamos el conjunto $B = \{a_1 + 9, a_2 + 9, ..., a_{45} + 9\}$. Notar que los 90 números de $A \cup B$ sólo pueden variar entre 1 y 89, inclusive. Por principio de Dirichlet, dos de estos números deben coincidir. Por otra parte, cada conjunto contiene únicamente números distintos entre sí. De aquí se sigue que algún número del conjunto A debe ser igual a algún número de B. $\square$

Tercer Nivel Juvenil

Preguntas y soluciones

1. Si a es un número entero tal que

$$\cos\left(\frac{a}{a-p}\pi\right) \in \{1, -1\},$$

   y p es primo distinto de 2, entonces:

   a) a es par.
   b) a es impar.
   c) a es múltiplo de p.
   d) No existe a que cumpla el enunciado.
   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución. La respuesta correcta es la opción a). Puesto que $\cos\left(\frac{a}{a-p}\pi\right) \in \{1, -1\}$, entonces $\frac{a}{a-p} \in \mathbb{Z}$, de donde se tiene que

$$a - p | a.$$

   Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k(a-p) = a.$$

Al despejar a de esta igualdad, y como a es entero, se concluye que

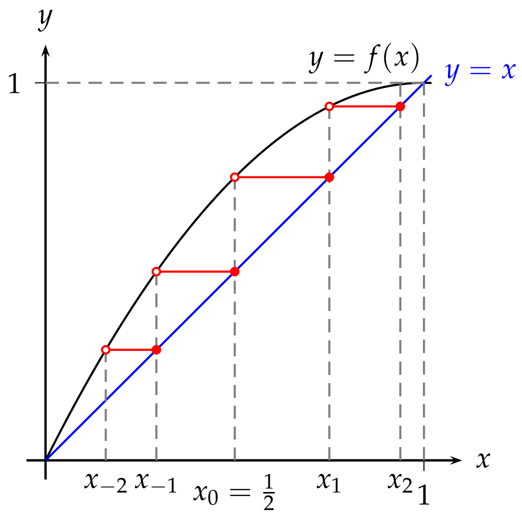
$$a = \frac{kp}{k-1} \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, como $k-1$ no divide a k, se sigue que $k-1$ debe dividir a p y, por lo tanto, como p es primero, se tiene que

$$k \in \{0, 2, p+1, 1-p\},$$

de donde $a \in \{0, 2p, p+1, p-1\}$. Finalmente, al ser $p \neq 2$, a es par, ya que p es impar. □

2. Sean f la función definida por $f(x) = 1-(x-1)^2$ para todo $x \in (0,1)$ y g como se muestra en la figura, donde se presenta las gráfica de $y = f(x)$, $y = g(x)$ y $y = x$ en negro, rojo y azul, respectivamente:



La expresión para $g(x)$ es:

a) $g(x) = 1 - \frac{1}{2^{2n}}$ si $x \in \left(\frac{1}{2^{2(n-1)}}, \frac{1}{2^{2n}}\right]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

b) $g(x) = 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2n}}}$ si $x \in \left(\frac{1}{2^{2(n-1)}}, \frac{1}{2^{2n}}\right]$.

c) $g(x) = x_n$ si $x \in (x_{n-1}, x_n]$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, donde $x_n = 1 - 2^n$.

d) $g(x_n) = x_{n+1}$ donde $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

e) Ninguna de las anteriores.

Solución. Como g es constante en cada intervalo de la forma $(x_n, x_{n+1}]$, para hallar $g(x)$, basta con calcular los puntos x_n para cada n. Observamos que estos se obtiene de la siguiente manera.
La ordenada de $(x_0, f(x_0))$ es la misma que (x_1, x_1), ya que este punto está en la recta de ecuación $y = x$. Entonces

$$x_n = f(x_{n-1}) = 1 - (x_{n-1} - 1)^2. \tag{.1}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} x_n = 1 - (x_{n-1} - 1)^2 & \text{para } n \geq 1, \\ x_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

De (.1), tenemos que

$$|x_{n-1} - 1| = \sqrt{1 - x_n},$$

y como $0 < x_{n-1} < 1$, obtenemos que

$$x_{n-1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} x_{n-1} = 1 - \sqrt{x_{n-1} - 1} & \text{para } n \leq 0, \\ x_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora, podemos hallar una fórmula explícita para x_n para todo $n \in \mathbb{Z}$. En efecto:

$$x_1 = f(x_0) = 1 - (x_0 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{2^2}.$$

De manera similar, tenemos que

$$x_2 = f(x_1) = 1 - (x_1 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{2^4}.$$

Y, en general, para cada $n \geq 1$:

$$x_n = 1 - \frac{1}{2^{2n}}.$$

Y, para $n \leq -1$:

$$x_{-1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

De forma similar:

$$x_{-2} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} = 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}.$$

Y, en general, para cada $n \leq -1$:

$$x_n = 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2n}}}.$$

Por lo tanto:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{2n}} & \text{si } n \geq 1 \text{ y } x \in (x_n, x_{n+1}], \\ 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2n}}} & \text{si } n \leq -1 \text{ y } x \in (x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$ □

3. Una empresa de turismo busca información sobre el número de días soleados y el número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello, recibe información de seis regiones que le transmiten los datos de la siguiente tabla:

Región	Soleados o lluviosos	Inclasificables
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de procesar esta información sabe, además, que prescindiendo de una de las regiones, el número de días lluviosos es la tercera parte del de días soleados. La región prescindida es:

a) A *b)* C *c)* D *d)* F *e)* Ninguna de las anteriores

Solución. La respuesta correcta es la opción *d*). En efecto, al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las regiones restantes es un múltiplo de 4. Ahora bien, la suma de los días soleados o lluviosos, para las seis regiones, es igual a 1994, número que dividido entre 4 da resto 2. Y el único dato de esta columna que da resto 2 al dividirlo entre 4 es 330, correspondiente a la región F. Suprimiendo esta región quedan entre las cinco restantes, 416 días lluviosos y $3 \cdot 416 = 1248$ días soleados. □

4. La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que:

$$f(n + f(n)) = 2f(n),$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ está definida por:

a) $f(n) = n$ *b)* $f(n) = (n-1) + f(n)$ *c)* $f(n) = n + f(n)$
d) $f(n) = n + f(n-1)$ *e)* Ninguna de las anteriores

Solución. Supongamos que $f(1) = 1$. Entonces

$$f(1 + f(1)) = 2f(1) = 2;$$

por lo tanto:

$$f(2) = 2.$$

Tenemos, entonces, que

$$f(2 + f(2)) = 2f(2),$$

de donde

$$f(4) = 4.$$

Y, como $2 < 3 < 4$ y f es estrictamente creciente, f toma valores en $\mathbb{N}$, obtenemos que $f(3) = 3$, ya que

$$2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4.$$

Por inducción, podemos probar, entonces que, si $f(1) = 1$, entonces $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Ahora supongamos $f(1) = b > 1$; entonces,

$$f(1 + b) = 2b.$$

Y, como:

$$1 < 1 + 1 < \cdots < 1 + b$$

y f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1+1) < \cdots < f(1+b) = 2b = b + b,$$

de donde resulta que $f(1),\ f(2), \ldots,\ f(1+b)$ son $b+1$ naturales, distintos (ya que f es creciente), el primero es igual a b y el último $2b$. Por lo tanto, estos números deben ser consecutivos:

$$f(1) = b,\ f(2) = b+1,\ f(3) = b+2, \ldots,\ f(1+b) = b+b.$$

En general, para $n > 1$, si $f(n) = c$, se tiene que

$$f(n + c) = 2c = c + c,$$

de donde se obtiene

$$c = f(n) < f(n+1) < \cdots < f(n+c) = 2c = c + c$$

y que los números

$$f(n),\ f(n+1), \ldots,\ f(n+c)$$

son consecutivos. En resumen, los números $f(n)$ y $f(n+1)$ son dos números consecutivos. Por lo tanto:

$$f(2) = 1 + f(1), \quad f(3) = 2 + f(1), \quad f(4) = 3 + f(1), \ldots;$$

Es decir,

$$f(n) = (n-1) + f(1)$$

para cada $n \geq 1$. $\square$

5. Pruebe que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

Solución. Por inducción sobre n.

(a) Si $n = 2$, basta tomar

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 4,$$

pues $3^2 + 4^2 = 5^2$.

(b) Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ y que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = k^2.$$

Probaremos que existen dos enteros positivos a_{n+1} y p tales que

$$k^2 + a_{n+1}^2 = p^2. \tag{.2}$$

Si a_{n+1} satisficiera la igualdad (.2), entonces

$$k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 = (p + a_{n+1})(p - a_{n+1}),$$

de donde, si ponemos $a = (p + a_{n+1})$ y $b = (p - a_{n+1})$, obtenemos que $k^2 = ab$ y

$$p = \frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = \frac{a-b}{2}.$$

Como p y a_{n+1} son naturales, de estados dos igualdades concluimos que a y b tienen la misma paridad; es decir, o los dos son pares o los dos son impares.
Analicemos cada uno de los casos.

i. a y b son pares, entonces $k^2 = 4m$ con m un entero positivo. Tomando $a = 2m$ y $b = 2$, podemos tomar:

$$p = m + 1 = \frac{k^2}{4} + 1 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = m - 1 = \frac{k^2}{4} - 1.$$

ii. a y b son impares, entonces $k^2 = 2m + 1$ con m un entero positivo. Tomando $a = 2m + 1$ y $b = 1$, podemos tomar:

$$p = m + 1 = \frac{k^2 - 1}{2} + 1 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = m = \frac{k^2 - 1}{2}. \quad \square$$

6. Notemos $G(n,k)$ al número de agrupaciones de n objetos en k grupos. Por ejemplo, $G(3,2) = 3$, pues existen 3 diferentes posibilidades: $1|2,3;\ 2|1,3;\ 3|1,2$. Probar que

$$\sum_{k=1}^{m} G(n,k) \cdot k! \cdot \binom{n}{k} = m^n.$$

Solución. m^n es el número de posibilidades de escoger m cartas diferentes n veces, cuando se permiten repeticiones.
Supongamos que el número total de cartas elegidas es k. Hay $\binom{m}{k}$ maneras de escoger k cartas de un un total de m. Ahora apuntamos el orden de las cartas; por ejemplo, para $k = 1,\ n = 3$, $2|1,3$ significa que la primera carta fue elegida la segunda vez, la segunda carta fue elegida la primera y tercera vez. Por lo tanto tenemos $G(3,2)$ ($G(k,n)$) posibilidades. Puesto que las cartas son diferentes, debemos multiplicar por $k!$. Finalmente, sumamos sobre los posibilidades $k = 1, 2, \ldots, m$. $\square$

7. Notemos con $D(n)$ el número de enteros positivos $m \leq n$ para los cuales $\operatorname{mcd}(n,m) = 1$ (por ejemplo, $D(6) = 2$, pues m es 1 o 5). Pruebe que

$$D(d_1) + D(d_2) + \cdots + D(d_k) = n,$$

donde $d_1,\ d_2, \ldots,\ d_k$ son los divisores de n.

Solución. Para todo número $1 \leq l \leq n$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que

$$\operatorname{mcd}(l,n) = d_i.$$

Como $\operatorname{mcd}(l,n) = d_i$ es equivalente a

$$\operatorname{mcd}\left(\frac{l}{d_i}, \frac{n}{d_i}\right) = 1, \tag{.3}$$

para cada $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que (.3) se verifica.

Por lo tanto, de la definición de D, hay $D\left(\frac{n}{d_i}\right)$ números l entre 1 y n que cumplen con (.3), y, como el total de números l es n, se tiene que

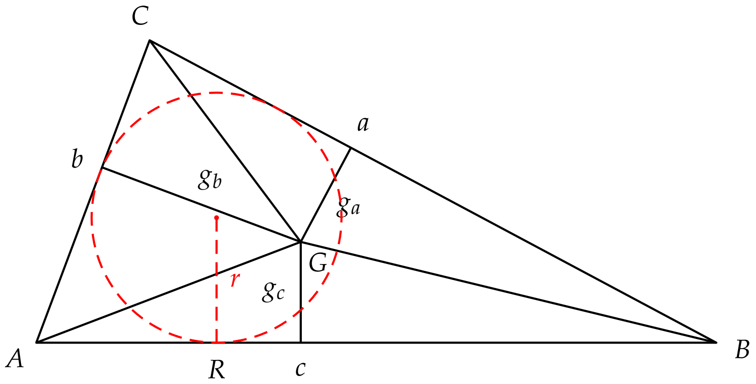
$$D\left(\frac{n}{d_1}\right)+D\left(\frac{n}{d_2}\right)+\cdots+D\left(\frac{n}{d_k}\right)=n,$$

que es equivalente a lo que queríamos demostrar. □

8. El baricentro de un triángulo ABC es G. Denotamos por g_a, g_b, g_c las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente. Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Pruebe que:

   (i) $g_a \geq \frac{2r}{3}$, $g_b \geq \frac{2r}{3}$, $g_c \geq \frac{2r}{3}$.

   (ii) $\frac{g_a+g_b+g_c}{r} \geq 3$.



Solución.

(i) Se sabe que si se une G con cada vértice, se forman tres triángulos BGC de base a y altura g_a, AGC de base b y altura g_b, y AGB de base c y altura g_c de la misma área. Por tanto, llamando S al área de ABC, tenemos:

$$a\cdot g_a = b\cdot g_b = c\cdot g_c = \frac{2S}{3}. \tag{.4}$$

Por otra parte, sabemos que

$$r(a+b+c)=2S.$$

(para demostrarlo, basta unir el centro con los tres vértices y se obtienen tres triángulos de bases a, b, c y altura común r). Luego, de (.4), y despejando queda:

$$g_a = \frac{r}{3}\frac{(a+b+c)}{a}, \quad g_b = \frac{r}{3}\frac{(a+b+c)}{b}, \quad g_c = \frac{r}{3}\frac{(a+b+c)}{c}. \tag{.5}$$

Y, por desigualdad triangular, $(b+c \geq a)$, resulta que

$$\frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a} \geq 2,$$

de donde, y por (.5), se obtiene $g_a \geq \frac{2r}{3}$. De modo análogo se obtienen las desigualdades para g_b y g_c.

(ii) De (.5), se obtiene:

$$\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c} = \frac{3a}{r(a+b+c)} + \frac{3b}{r(a+b+c)} + \frac{3c}{r(a+b+c)} = \frac{3}{r},$$

a partir de lo cual, y por la desigualdad entre la media aritmética y armónica:

$$\frac{g_a+g_b+g_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{g_a}+\frac{1}{g_b}+\frac{1}{g_c}} = \frac{3}{\frac{3}{r}},$$

se concluye que

$$\frac{g_a+g_b+g_c}{r} \geq 3. \qquad \square$$