XIII Edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Mayo 2016

Sociedad
Ecuatoriana de
Matemática

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Directorio 2016
Presidente: Pedro Merino

Vicepresidenta: Andrea Moreira

Secretario: Sergio González

Tesorero: Diego Recalde

Vocales principales: Juan Carlos De los Reyes, Juan Carlos Trujillo, Miguel Yangari, John Skukalek.

Vocales suplentes: Eduardo Alba, Mario Cueva, Juan Fernando Guevara, Bryan Maldonado.

Comisiones para la elaboración de las preguntas de la XIII edición de la Olimpiada Matemática

Coordinador General: Miguel Yangari

Categoría infantil, niveles 1 y 2: Sandra Gutiérrez, Diego Recalde (coordinador), María Fernanda Salazar, Ramiro Torres.

Categoría juvenil, nivel 1: David Hervas (coordinador), John Skukalek.

Categoría juvenil, nivel 2: Eduardo Alba, Thomas Reytier.

Categoría juvenil, nivel 3: Carlos Cortéz, Andrés Merino, Pedro Merino (Coordinador), István Mezö, Luis Miguel Torres.

Sedes de la XIII edición de la Olimpiada Matemática:

Quito
Escuela Politécnica Nacional (categoría infantil). Coordinador: Pedro Merino
Universidad San Francisco de Quito (categoría juvenil). Coordinadora: Andrea Moreira

Loja
Universidad Técnica Particular de Loja. Coordinador: Patricio Puchaicela

Cuenca
Universidad de Cuenca. Coordinador: César Trelles

Colaboradores: Valeria Arias, Juan Carlos de los Reyes, Cao Van Chung, Julio Erazo, Edwin Flores, Myrian Guanoluiza, Estefanía Loayza, Kateryn Herrera, Paula Castro, Sergio González, Cristhian Núñez, Josué Lindao, Sofía López, María José Castellano, Diana Taipe, Ana LLumigusín, Pamela Herrera, Diana Murillo, David Villacís.

Instituciones colaboradoras: Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad Técnica Particular de Loja, Universidad de Cuenca.

Instituciones auspiciantes: Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, McGraw-Hill y Novotendencia

Edición de esta compilación: Juan Carlos Trujillo y Diego Recalde
Edición de las pruebas de las Olimpiadas: Juan Carlos Trujillo
Preparación del documento en LaTeX: Juan Carlos Trujillo
Diseño de la portada: Julio Erazo
Primer tiraje: 200 ejemplares.
Mayo 2016

Índice general

Presentación 1

Cuadro de honor de la XIII Edición 2

Pruebas correspondientes a la XIII Olimpiadas 7

- Primer Nivel Infantil 7
- Segundo Nivel Infantil 11
- Primer Nivel Juvenil 17
- Segundo Nivel Juvenil 24
- Tercer Nivel Juvenil 30

Presentación

Estas memorias de la XIII Edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática constituyen un modesto reconocimiento a los ganadores, así como a todas las personas que colaboraron en su organización y desarrollo. Aquí se encuentra escrita una pequeña parte de la historia de estos niños, niñas y jóvenes que se han destacado al resolver los problemas que estas memorias compilan.

Este evento fue fruto de la colaboración entre varias instituciones, públicas y privadas, que unieron sus esfuerzos para que las Olimpiadas de la SEdeM hayan sido nuevamente una realidad, en la que escuelas y colegios de diversas regiones del Ecuador se encontraron el sábado 7 de mayo de 2016, con un objetivo común: las Matemáticas.

Que satisfacción es para todas las personas que colaboramos en la realización de estas Olimpiadas el poder testificar el entusiasmo de niños y niñas de diferentes edades en el momento de la participación. Nos enriquecen sus preguntas, sus dudas, sus esfuerzos y su creatividad al resolver los problemas preparados para la ocasión. Agradecemos a los colegios que, a través de sus profesores, cultivan el gusto por las matemáticas en sus estudiantes y que son nuestros aliados en este proceso, ya que en la Sociedad Ecuatoriana de Matemática tenemos la convicción de que podemos causar un impacto positivo en el aprendizaje de las matemáticas mediante las olimpiadas y otros mecanismos.

Esperamos que las memorias que año a año dan a conocer a nuevos participantes, nuevos problemas y nuevos ganadores, sirvan para que más estudiantes, sus padres y profesores los lean y les ayuden a compartir un momento de agradable razonamiento abstracto recreativo. Les esperamos en la siguiente aventura matemática.

Pedro Merino
Presidente de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Cuadro de honor de la XIII Edición

Primer Nivel Infantil

ORO	Paz y Miño Ramírez Juan Ignacio COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
PLATA	Llorca Rosero Matias UNIDAD EDUCATIVA HONTANAR
BRONCE	Punina Subía María Alicia CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Campuzano Ruilova Marisol LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Alvarado Chauvin Diego Gabriel INSTITUTO EDUCATIVO ANTONIO PEÑA CELI
Mención honorífica	Córdova Guerra María Belén ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	Del Pozo Albuja Matías Andrés CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Panchi Soria Edwin Nicolas UNIDAD EDUCATIVA EL PRADO
Mención honorífica	Donoso Game Juan Pablo CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Flores Santiago FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Mancero Chafla Mateo Nicolás ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	De La Cadena Solano Marthín Isaac ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	Andrade Cazar Analía CATÓLICO JOSÉ ENGLING

SEGUNDO NIVEL INFANTIL

ORO	Calle Sáenz Gabriel Estban CATÓLICO JOSÉ ENGLING
PLATA	Campuzano Marisol FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
PLATA	Díaz Palma Andrés David ISM ACADEMY QUITO
BRONCE	Casares Bermeo Ana Carolina COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
Mención honorífica	Andrade Mena Emilio CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Espinosa Dávalos Estevan CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Delle Donne Martínez Ricardo Alfredo AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Granja Juan Sebastián FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Toledo Villacís Andrés Nicolás AMERICANO DE QUITO

Primer Nivel Juvenil

ORO	Naranjo Zurita Cristian Thomás INTISANA
PLATA	Gonzales Rivera Eduardo Andrés INTISANA
BRONCE	Alvarado Sarmiento Pablo Sebastian COLEGIO DE BACHILLERATO PARTICULAR ANTONIO PEÑA CELI
Mención honorífica	Rosales Arildsen Andrea COLEGIO AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Díaz Hervas Luis Eduardo INTISANA
Mención honorífica	Van Ordt Manuel Ignacio COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
Mención honorífica	Quiroga Falcón Marcos Felipe FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Samaniego Frixone Juan José LICEO CAMPOVERDE
Mención honorífica	Franco Bastidas Edwin Sebastián INTISANA
Mención honorífica	Segovia Vásquez Joseline Carolina UNIDAD EDUCATIVA TÉCNICO SALESIANO
Mención honorífica	Sotomayor Ramos Juan Francisco AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Baca Mosquera María Emilia AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Serrano Granja Juan Andrés CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Proaño Barrientos Anna Michelle CATÓLICO JOSÉ ENGLING

Segundo Nivel Juvenil

ORO	Játiva Beltrán Anna María COLEGIO LOS PINOS
PLATA	Peña Andrés COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
PLATA	Salazar Reyes Sara Isabel COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING
BRONCE	Casias Vélez Isaac LICEO DE LOJA
BRONCE	Miño Arboleda Juan Javier LICEO CAMPOVERDE
BRONCE	Vallejo Pérez Sebastián FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
BRONCE	Zavala Reina Pablo Martín FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Artega Jácome Mateo CATÓLICO JOSÉ ENGLING
Mención honorífica	Albán Terán Margarita Gabriela COLEGIO LOS PINOS
Mención honorífica	Alvarado Moreira Roberto Andres COLEGIO DE BACHILLERATO PARTICULAR ANTONIO PEÑA CELI
Mención honorífica	Najas Jervis María José AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Naranjo Araujo Paula Francisca ALEMÁN DE QUITO
Mención honorífica	Pilozo Villacreses Samuel Abel UNIDAD EDUCATIVA LICEO CRISTIANO DE GUAYAQUIL
Mención honorífica	Suárez Guayasamín Julián Matías AMERICANO DE QUITO
Mención honorífica	Torres Alvarado Daniel Elías UNIDAD EDUCATIVA LICEO CRISTIANO DE GUAYAQUIL

TERCER NIVEL JUVENIL

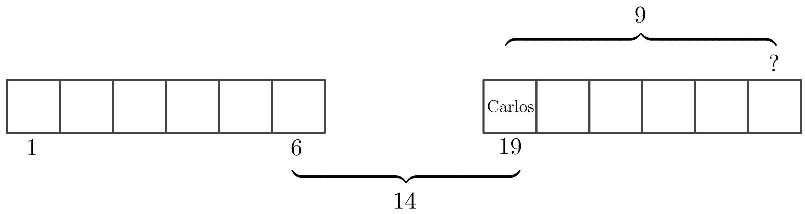
ORO	Malavé Moreira Daniel Jeremías UNIDAD EDUCATIVA LICEO CRISTIANO DE GUAYAQUIL
PLATA	Regalado Lozano Sebastián David UNIDAD EDUCATIVA LICEO CRISTIANO DE GUAYAQUIL
BRONCE	Benavides Quincha Pablo Andrés UNIDAD EDUCATIVA HONTANAR
Mención honorífica	Moya Tamaríz Lucía FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL
Mención honorífica	Cannavo Nicolás COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO
Mención honorífica	Cortez Lemos María Paula HENRI BECQUEREL

Primer Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. Carlos está en una fila de niños para comprar un helado. Si se empezara a contar desde el niño que está en la sexta posición, Carlos estaría en la posición 14; en cambio, estaría en la posición novena si se empezara a contar desde el final de la fila. ¿Cuántos niños en total quieren comprar un helado?

   Solución. Hay 27 niños en la fila. En efecto, el siguiente dibujo ilustra la situación:

   Como se observa en la figura, Carlos está en la posición 19:

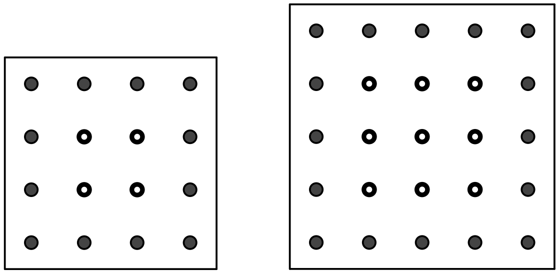
   $$6 + (14 - 1) = 6 + 13 = 19.$$

   Por un razonamiento análogo, la última posición en la fila es:

   $$19 + (9 - 1) = 19 + 8 = 27.$$

   Por tanto, hay 27 niños que quieren tomar un helado. □

2. El cuadrado de la izquierda tiene 16 puntos. En su interior se observa un cuadrado de 4 puntos de centro blanco. A la derecha, en cambio, hay un cuadrado de 25 puntos y, en su interior, uno de 9 puntos de centro blanco:

Si el cuadrado tuviera 144 puntos:

(a) ¿Cuántas filas y cuántas columnas tendría?

(b) ¿Cuántos puntos serían de color negro?

Solución. El cuadrado tiene 12 filas y 12 columnas, y hay 44 puntos de color negro.
En efecto, si el cuadrado tuviera 144 puntos:

(a) Estaría constituido por el mismo número de filas que de columnas (pues se trata de un cuadrado). Luego, ese número sería 12 porque

$$144 = 12 \times 12.$$

(b) Observa que el cuadrado interno tiene dos filas (y columnas) menos que el cuadrado total. Por tanto, si el cuadrado tiene 12 filas (y 12 columnas), el cuadrado interno tendrá 10 filas y 10 columnas. Así el número de puntos de color blanco es

$$10 \times 10 = 100.$$

Así, hay

$$144 - 100 = 44$$

puntos de color negro. □

3. Encuentra los valores de los dígitos a, b, c y d en la siguiente resta de dos números de cuatro dígitos:

```
   a 1 b 2
 - 1 c 7 d
-------------
   2 8 5 7
```

Solución. Los dígitos buscados son $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$ y $d = 5$. En efecto, la resta correspondiente es:

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & 3 & 2 \\ - & 1 & 2 & 7 & 5 \\ \hline & 2 & 8 & 5 & 7 \end{array}$$

□

4. El lado de un cuadrado mide L unidades y su área es dos veces el área de un triángulo cuya altura mide L unidades. ¿Cuál es la longitud de la base del triángulo?

Solución. En primer lugar, se tiene que

$$\text{área del cuadrado} = L \times L = L^2. \tag{.1}$$

En segundo lugar:

$$\text{área del triángulo} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times L. \tag{.2}$$

Y, en tercer lugar, se tiene como hipótesis que

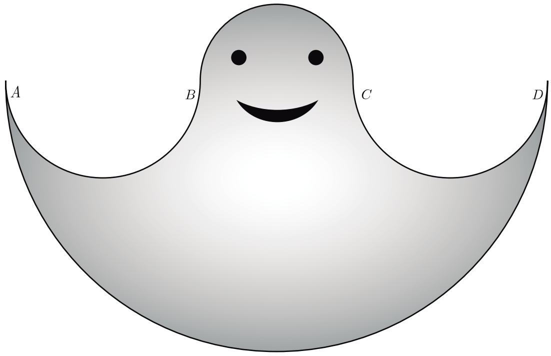
$$\text{área del cuadrado} = 2 \times \text{área del triángulo}.$$

Por tanto, de esta igualdad y de (.1) y (.2), se obtiene que

$$\begin{aligned} L^2 &= 2 * \frac{1}{2} \times \text{base} \times L \\ &= \text{base} \times L \\ L &= \text{base}. \end{aligned}$$

Es decir, la base del triángulo mide L unidades. □

5. El "fantasma"del siguiente dibujo está trazado sobre un papel:

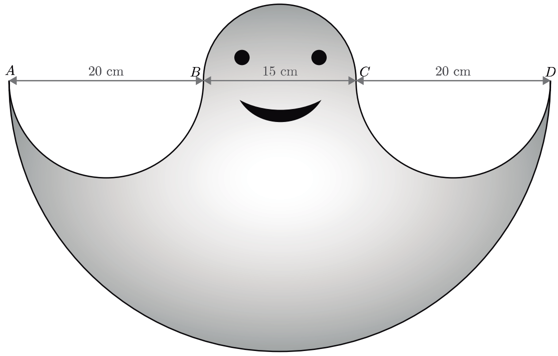


Cortar cada centímetro de esta figura utilizando una tijera toma 10 segundos. Si

$$AB = CD = 20 \quad \text{y} \quad BC = 15$$

centímetros, respectivamente; y la cabeza, los brazos y el cuerpo son semicircunferencias, calcula el tiempo que tomará recortar toda la figura fantasmal.

Solución. Para determinar el tiempo que te tomará cortar la figura del fantasma, debes conocer su perímetro. Para ello, tienes que calcular los perímetros de cuatro semicircunferencias cuyos diámetros son: 45, 20, 20 y 15 centímetros respectivamente:



Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= \frac{\pi \times 45}{2} + \frac{\pi \times 20}{2} + \frac{\pi \times 20}{2} + \frac{\pi \times 15}{2} \\ &= \frac{45}{2}\pi + 20\pi + \frac{15}{2}\pi \end{aligned}$$

$$= 50\pi$$

centímetros. Luego, el tiempo que tardará en cortar al fantasma es

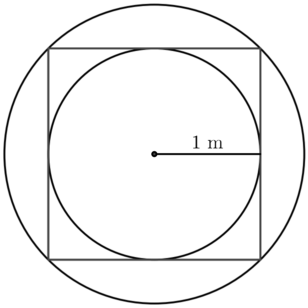
$$10\,\frac{\text{seg}}{\text{cm}} \times 50\pi\,\text{cm} = 500\pi\,\text{seg};$$

es decir, aproximadamente 26 minutos con 10 segundos. $\square$

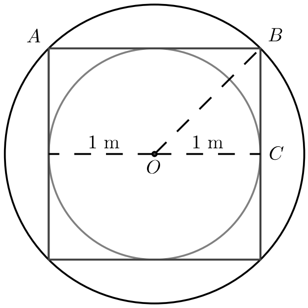
SEGUNDO NIVEL INFANTIL

Preguntas y soluciones

1. Si el radio de la circunferencia contenida en el cuadrado mide 1 metro, ¿cuál es el área de la circunferencia que contiene al cuadrado?



Solución. Como el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrado mide 1 metro, el lado del cuadrado mide 2 metros:



Luego el radio de la circunferencia que circunscribe al cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle OBC$ cuyos catetos miden 1 metro cada uno. Por tanto, por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Radio de la circunferencia}^2 &= OB^2\\ &= OC^2 + BC^2\\ &= 1^2 + 1^2 = 2.\end{aligned}$$

De donde el área de esta circunferencia es igual a

$$\text{Área de la circunferencia de radio } OB = \pi \times 2 = 2\pi. \quad \square$$

$\square$

2. Indica cómo se construye el siguiente triángulo y completa los números que faltan en la base del triángulo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & ? & & ? & & ? & & \frac{1}{5}
\end{array}$$

Solución. Cada fila empieza y termina con un número de la forma $\frac{1}{n}$. La primera con $n = 1$, la segunda con $n = 2$; etcétera. Por tanto, la sexta fila empieza en $\frac{1}{6}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & ? & & ? & & ? & & \frac{1}{5} & \\
{\color{red}\frac{1}{6}} & & & & & & & & & & {\color{red}\frac{1}{6}}
\end{array}$$

Ahora, a partir de la tercera fila, la suma de dos números consecutivos de la fila siempre es igual al número que está entre los dos números dados pero en la fila superior. Por ejemplo, en la tercera fila

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & {\color{blue}\frac{1}{2}} & & {\color{orange}\frac{1}{2}} & \\
{\color{red}\frac{1}{3}} & & {\color{red}\frac{1}{6}} & & {\color{green}\frac{1}{3}}
\end{array}$$

se tiene que

$${\color{red}\frac{1}{3}} + {\color{red}\frac{1}{6}} = {\color{blue}\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad {\color{red}\frac{1}{6}} + {\color{green}\frac{1}{3}} = {\color{red}\frac{1}{2}}.$$

En la cuarta fila:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \end{array}$$

se tiene que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3+1}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1+1}{12} = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{1}{3}.$$

Los números que faltan en la quinta fila

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{5} & & A & & B & & C & & \frac{1}{5} \end{array}$$

deben satisfacer las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{5} + A = \frac{1}{4}, \quad A + B = \frac{1}{12}, \quad B + C = \frac{1}{12} \quad \text{y} \quad C + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto,

$$A = C = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$$

y

$$B = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{1}{30},$$

y la quinta fila se verá así:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5}
\end{array}
$$

□

3. Determina el patrón en las siguientes sumas:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
1) & 1 & = & 1 & = & 1^3 \\
2) & 3+5 & = & 8 & = & 2^3 \\
3) & 7+9+11 & = & 27 & = & 3^3 \\
4) & 13+15+17+19 & = & 64 & = & 4^3
\end{array}
$$

y utilícelo para encontrar el valor de la suma

$$111+113+115+117+119+121+123+125+127+129+131.$$

Solución. Para determinar el patrón, observa que los números en todas las sumas son impares consecutivos. En la fila n hay n sumandos. La suma requerida tiene 11 términos y todos son números impares consecutivos. Esto sugiere que la suma en cuestión podría ser la fila número 11.

Para averiguarlo, solo hay que determinar la relación entre el primer término de la suma y el número de fila. Así, puedes ver que

$$
\begin{array}{lr}
1) & 1 = 1\times 0+1 \\
2) & 3 = 2\times 1+1 \\
3) & 7 = 3\times 2+1 \\
4) & 13 = 4\times 3+1.
\end{array}
$$

Parece ser que la relación entre el número de fila n y el primer término de la suma es la siguiente:

$$n\times(n-1)+1.$$

En el caso de la quinta fila, el primer término de la suma debería ser:

$$5\times 4+1 = 21.$$

Esto concuerda con el hecho de que el último término de la suma de la cuarta fila es 19.

Ahora solo falta ver si la suma pedida se corresponde a la fila número 11. Para ello es suficiente ver cuál es el primer término de la suma de dicha fila; este debe ser:

$$11\times 10+1 = 110+1 = 111.$$

Y es, justamente, el primer sumando de la suma solicitada. Por tanto, se tiene que

$$111 + 113 + 115 + 117 + 119 + 121 + 123 + 125 + 127 + 129 + 131 = 11^3 = 1\,331.$$

□

4. En una carrera de 400 metros, la participación se realiza por equipos integrados por dos atletas. Uno de los atletas debe recorrer los primeros 200 metros y el otro, los 200 metros finales. El equipo ganador es el que recorre los 400 metros en el menor tiempo posible. Para la edición 2016, se han presentado cuatro equipos: $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{B_1, B_2\}$, $C = \{C_1, C_2\}$ y $D = \{D_1, D_2\}$. En la siguiente tabla están los tiempos en minutos que los 8 deportistas hacen en una carrera de 200 metros::

A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2
11	10	11	12	10	12	10	11

Se sabe que los atletas A_2, C_2 y D_1 han contraído gripe y, en consecuencia, su rendimiento ha disminuido en 20 %, 30 % y 50 %, respectivamente; y que los deportistas B_2 y C_1 han mejorado su rendimiento en 30 % y 10 %, respectivamente. Si se realizara la carrera en este momento, ¿cuál sería el equipo ganador?

Solución. Los nuevos tiempos para los atletas que el proceso gripal de A_2, C_2 y D_1 y el mejoramiento de B_2 y C_1 son los siguientes:

A_1 11	A_2 $10 + 0{,}2 \times 10 = 12$	Total A 23
B_1 11	B_2 $12 - 0{,}3 \times 12 = 8{,}4$	Total B 19,4
C_1 $10 - 0{,}1 \times 10 = 9$	C_2 $12 + 0{,}3 \times 12 = 15{,}6$	Total C 24,6
D_1 $10 + 0{,}5 \times 10 = 15$	D_2 11	Total D 26

Por tanto, el equipo ganador será B y el orden de llegada: B, A, C y D. □

5. Cierto terreno tiene la forma de un cuadrado. En esta tierra se siembra maíz utilizando dos tipos de semillas: A y B. El rendimiento de la segunda semilla es de medio kilogramo de maíz por cada planta sembrada, y el rendimiento de la semilla A es tres veces mayor que el de la semilla B.
Para realizar la siembra, el terreno es dividido en cuadrados cuyos lados miden 1 metro respectivamente, y las semillas se colocan en cada uno de estos cuadrados. La distribución de las semillas se ilustra a continuación en terrenos cuyos lados miden 2, 3, 4 y 5 metros, respectivamente:

A	A
A	A

A	A	A
A	B	A
A	A	A

A	A	A	A
A	B	B	A
A	B	B	A
A	A	A	A

A	A	A	A	A
A	B	B	B	A
A	B	A	B	A
A	B	B	B	A
A	A	A	A	A

¿Cuántos kilos de maíz se obtendrán en un terreno cuyo lado mide 8 metros?

Solución. La distribución de las semillas en un terreno cuyo lado mide 8 metros es la siguiente:

A	A	A	A	A	A	A	A
A	B	B	B	B	B	B	A
A	B	A	A	A	A	B	A
A	B	A	B	B	A	B	A
A	B	A	B	B	A	B	A
A	B	A	A	A	A	B	A
A	B	B	B	B	B	B	A
A	A	A	A	A	A	A	A

El número total de cuadrados en los que se siembran semillas del tipo A es:

$$(8+8+6+6)+(4+4+2+2) = 28+12 = 40.$$

El número total de los otros cuadrados es:

$$8 \times 8 - 40 = 64 - 40 = 24.$$

Por tanto, en este terreno se obtienen

$$40 \times 1{,}5 + 24 \times 0{,}5 = 60 + 12 = 72$$

kilogramos de maíz. □

PRIMER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. Halla tres números enteros consecutivos tal que su suma sea 2016.

Solución. Si n es el menor de los números buscado, los otros dos serán $n+1$ y $n+2$. Por tanto, debe verificarse la igualdad

$$n + (n+1) + (n+2) = 2016,$$

de donde se obtiene

$$3n = 2016 - 3 = 2013;$$

es decir, $n = 671$. Luego, los tres números enteros consecutivos buscados son

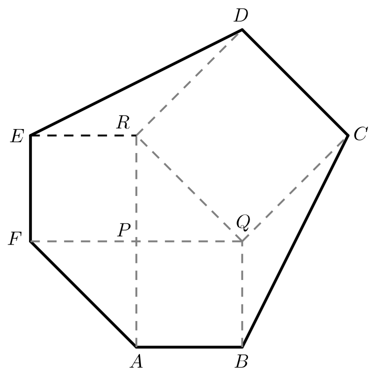
$$671, \quad 672 \quad \text{y} \quad 673$$

que, como se puede constatar fácilmente, su suma es igual a 2016.
Un procedimiento alternativo para encontrar estos tres números sin recurrir a las ecuaciones de primer grado es el siguiente: se divide 2016 para 3; se obtiene 672. Entonces los números buscados, además de 672, son el anterior $672 - 1$ y el sucesor $672 + 1$.
En efecto:

$$\begin{aligned} 2016 &= 3 \times 672 \\ &= 672 + 672 + 672 \\ &= (671 + 1) + 672 + 672 \\ &= 671 + 672 + 673. \end{aligned}$$

□

2. Calcula el área del hexágono $ABCDEF$

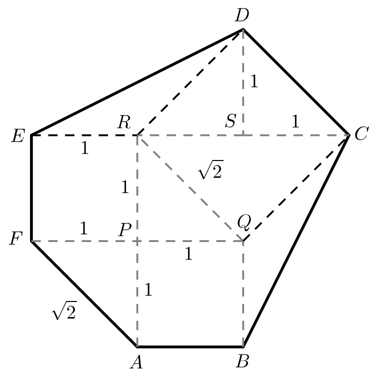


donde el triángulo PQR es rectángulo, isósceles y uno de sus catetos mide 1 unidad; y los cuadriláteros $ERPF$, $RDCQ$ y $PQBA$ son cuadrados.

Solución. En primer lugar, el área del hexágono $ABCDEF$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados $\square ABPQ$, $\square CDRQ$ y $\square EFPR$, y de las áreas de los triángulos $\triangle BCQ$, $\triangle DER$, $\triangle PQR$ y $\triangle AFP$:

$$\begin{aligned}\text{Área } ABCDEF = {} & \text{Área } \square ERPF + \text{Área } \square RDCQ + \text{Área } \square PQBA \\ & + \text{Área } \triangle BCQ + \text{Área } \triangle DER + \text{Área } \triangle PQR + \text{Área } \triangle AFP.\end{aligned}$$

Ahora bien, en el siguiente dibujo se muestran las medidas de los lados de estas siete figuras geométricas:



Las longitudes RQ y AF se obtienen por aplicación del teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\triangle PQR$ y $\triangle APF$, respectivamente.
Obsérvese que en los cuatro triángulos, una de las bases mide 1 unidad al igual que la altura correspondiente. Por tanto, el área de cada uno de dichos triángulos es igual a $\frac{1}{2}$:

$$\text{Área } \triangle BCQ = \text{Área } \triangle DER = \text{Área } \triangle PQR = \text{Área } \triangle AFP = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

En el caso de los cuadrados, el lado de dos de ellos mide 1 unidad, y del otro,

$\sqrt{2}$ unidades. Por tanto:

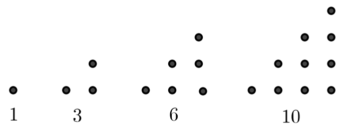
$$\text{Área } \square ERPF + \text{Área } \square RDCQ + \text{Área } \square PQBA = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 4.$$

Luego, se tiene que

$$\text{Área } ABCDEF = 4 + 4 \times \frac{1}{2} = 4 + 2 = 6.$$

Es decir, el área del hexágono $ABCDEF$ es igual a 6 unidades cuadradas. $\square$

3. Un número natural es **triangular** si puede "expresarse" en forma de triángulo. Por ejemplo, los números 1, 3, 6 y 10 son los primeros cuatro números triangulares pues

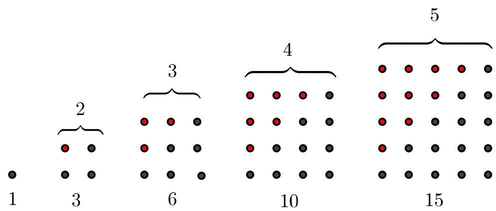


El número 2016 es un número triangular. Encuentra el número triangular que le sigue.

Solución. En primer lugar, obsérvese que el primer número triangular tiene 1 fila, el segundo número 2, el tercero 3, etcétera. En general, el n-ésimo número triangular tendrá n filas.
En segundo lugar, véase también que a partir del segundo número triangular, cada número es la suma de su número de filas y el número triangular anterior: el 3 es igual a $2 + 1$; el 6 es igual a $3 + 3$; el 10 es igual a $4 + 6$.
Por tanto, para encontrar el número triangular que sigue a 2016 bastará con encontrar el número filas de este número. Dígase que es n; entonces el número de filas del siguiente número será $n + 1$ y el número triangular que sigue a 2016 será

$$2016 + (n + 1).$$

Ahora bien, para encontrar n, el número de filas del número triangular 2016, obsérvese que el número de columnas de cada número triangular es igual a su número de columnas. Por ello, es posible "completar" a cada uno hasta formar un cuadrado como se muestra a continuación:



Nótese que lo que se ha aumentado a cada número triangular (puntos de color rojo) es, justamente, el número triangular anterior. Por tanto, cada número triangular puede expresarse de la siguiente manera:

> *La diferencia entre el cuadrado del número de filas (o columnas) y el número triangular anterior.*

En efecto, el número triangular 3 es igual a la diferencia entre 4 (el cuadrado de 2) y el número triangular anterior 1:

$$3 = 2^2 - 1.$$

El número triangular 6 es igual a la diferencia entre 9 (el cuadrado de 3) y el número triangular anterior 3:

$$6 = 3^2 - 3.$$

De manera similar los números triangulares siguientes:

$$10 = 4^2 - 6, \quad 15 = 5^2 - 10.$$

Si se generaliza este comportamiento de los números triangulares, y N representa un número triangular cualquiera, m su número de filas y M el número triangular anterior a N, se obtendrá que

$$N = m^2 - M.$$

Pero recuerda que todo número triangular es la suma de su número de filas y el triangular anterior; por tanto,

$$N = M + m.$$

Así, se tendrá que

$$N = m^2 - (N - m),$$

de donde

$$N = m^2 - N + m;$$

es decir,

$$2N = m^2 + m.$$

Con la ayuda de esta igualdad, se calculará el número de filas del número triangular 2016 pues se tendrá que cumplir que

$$2 \cdot 2016 = n^2 + n;$$

es decir,

$$n^2 + n - 4032 = (n + 64)(n - 63) = 0.$$

(Para encontrar los números 64 y 63 solo se debe descomponer el número 4032 en sus factores primos: $4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$). Por tanto,

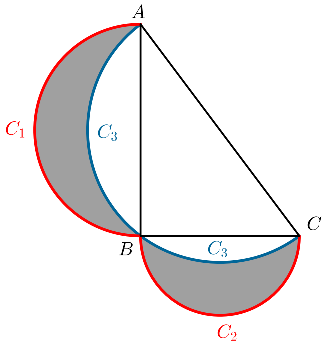
$$n = 63.$$

En otras palabras, el número triangular 2016 tiene 63 filas; luego, el siguiente número triangular tendrá 64 filas y, por tanto, dicho número será

$$2016 + 64 = 2080.$$

En resumen, el número triangular que sigue a 2016 es 2080. □

4. En la figura

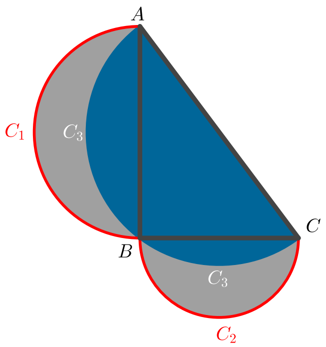


el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo con $\angle B$ el ángulo recto. Los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ miden 3 y 4 unidades, respectivamente. C_1, C_2 y C_3 son semicircunferencias cuyos diámetros son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Calcula el área de la región sombreada.

Solución. El área de la región sombreada puede obtenerse la suma de las siguientes áreas:

(a) La diferencia entre el área del semicírculo C_1 y A_1 (el área de la región circular del semicírculo C_3 y la cuerda $\overline{AB}$).

(b) La diferencia entre el área del semicírculo C_2 y A_2 (el área de la región circular del semicírculo C_3 y la cuerda $\overline{BC}$).



Entonces, el área buscada es igual a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - A_1 + \frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - A_2 &= \frac{1}{2}\times\pi\times\frac{AB^2+BC^2}{4} - (A_1+A_2) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{AC^2}{4}\pi - (A_1+A_2)\,;\end{aligned}$$

es decir, el área buscada es igual a

$$\frac{AC^2}{8}\pi - (A_1+A_2)\,.$$

Ahora bien, la suma $A_1 + A_2$ es, simplemente, la diferencia entre el área del semicírculo C_3 y el área del triángulo rectángulo $\triangle ABC$:

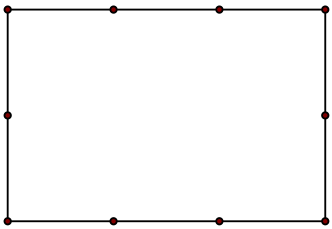
$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times AB \times BC \\ &= \frac{1}{8} AC^2 \pi - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \\ &= \frac{1}{8} AC^2 \pi - 6; \end{aligned}$$

es decir, el área buscada es igual a

$$\begin{aligned} \frac{AC^2}{8}\pi - (A_1 + A_2) &= \frac{AC^2}{8}\pi - \left(\frac{AC^2}{8}\pi - 6\right) \\ &= 6. \end{aligned}$$

En resumen, el área de la región sombreada es igual a 6 unidades cuadradas. □

5. Una cerca rectangular que encierra una superficie de 6 metros cuadrados utiliza 10 postes. La distancia entre dos postes contiguos es de 1 metro:



¿Cuál es el número mínimo de postes requeridos si la superficie que encierra la cerca es de 24 metros cuadrados?

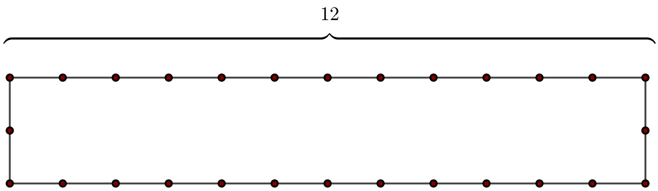
Solución. El número 24 puede expresarse como el producto de dos números naturales de las siguientes maneras:

$$24 = 12 \times 2, \quad 24 = 8 \times 3 \quad \text{y} \quad 24 = 6 \times 4.$$

Si se utilizara un rectángulo de dimensiones 12 por 2, se requerirían

$$13 + 1 + 13 + 1 = 28$$

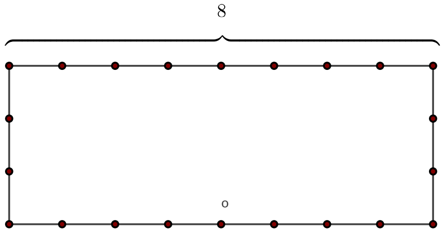
postes:



En cambio, si se utilizara el rectángulo 8×3, serían necesarios

$$9 + 2 + 9 + 2 = 22$$

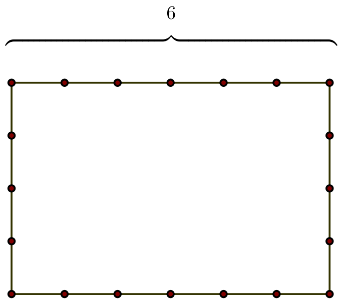
postes:



Finalmente, en el caso del rectángulo 6×4, se requerirían

$$7 + 3 + 7 + 3 = 20$$

postes:

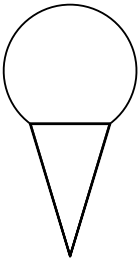


Luego, el número mínimo de postes es 20. $\square$

SEGUNDO NIVEL JUVENIL

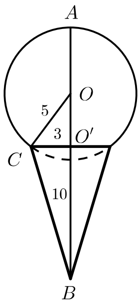
Preguntas y soluciones

1. Sobre un cono de galleta se coloca una bola de helado cuyo radio mide 5 centímetros, como se ilustra a continuación:



La base del cono es un círculo cuyo radio mide 3 centímetros y la altura del cono tiene una longitud de 10 centímetros. ¿Cuánto mide la altura total del "cono de helado" (el cono y el helado juntos) ?

Solución. Si O es el centro de la bola de helado y O' el centro de la base del cono,



entonces $\overline{OC}$ mide 5 centímetros, pues es un radio de la "bola" de helado; y $\overline{O'C}$ mide 3 centímetros, ya que es un radio de la base del cono. El segmento $\overline{O'B}$, que es la altura del cono, mide 10 centímetros. Finalmente, por el teorema de Pitágoras, tienes que

$$OO' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Por tanto,

$$AO + OO' + O'B = 5 + 4 + 10 = 19;$$

es decir, la altura del "cono de helado" mide 19 centímetros. $\square$

2. Un grupo de chicas y chicos se reúnen para jugar un juego con fichas. El joven que trajo las fichas dice: "Si cada uno de los que jugamos recibiera 11 fichas, nos faltarían 10 fichas para poder jugar; en cambio, el número de fichas faltantes sería menor que 5 si cada uno recibiera 10 fichas, y sería mayor que 5 si cada uno recibiera 9 fichas". ¿Cuál es el número mínimo de jugadores que están participando en el juego?

   Solución. Si participaran únicamente 2 jugadores, el número necesario de fichas sería
   $$11 \times 2 - 10 = 12.$$
   En este caso, si cada jugador recibiera 10 fichas, el número faltante de piezas sería
   $$10 \times 2 - 12 = 8;$$
   contrario a lo que el chico de las fichas afirmó (que el número de fichas faltantes sería menor que 5). Entonces, el número de jugadores no puede ser igual a 2. Supón que son 3. En este caso, el número necesario de fichas sería
   $$11 \times 3 - 10 = 23$$
   y el número de fichas faltantes sería
   $$10 \times 3 - 23 = 7,$$
   que es mayor que 5, por lo que también esta situación (3 jugadores) es imposible. A partir de estos dos ejemplos, queda claro un procedimiento a seguir para determinar el número de jugadores:

   (a) Supón que está dado un número de jugadores.

   (b) Determina el número de fichas necesarias para el juego.

   (c) Determina el número de fichas faltantes en el caso de que cada uno de los jugadores recibiera 10 piezas. Si el número faltante es mayor o igual que 5, incrementa en uno el número de jugadores y repite el procedimiento. En cambio, si el número faltante es menor que 5, determina el número de fichas que sobrarían en el caso de que cada jugador recibiera 9 fichas.

   (d) Si el número de fichas sobrantes resultaría ser mayor que 5, has encontrado el número mínimo de jugadores. En el caso contrario, incrementa en uno el número de jugadores y repite el procedimiento.

   Al aplicar este procedimiento, obtendrás que el número mínimo de jugadores es 8; los resultados obtenidos hasta llegar a esa respuesta, se muestran en la siguiente tabla:

Número de jugadores	2	3	4	5	6	7	8
Número de fichas necesarias	8	23	34	45	56	67	78
Número de fichas faltantes	8	7	6	5	4	3	2
Número de fichas sobrantes				2	4	6	

   Cuando hay 8 jugadores, es la primera vez que el número de fichas faltantes sería menor que 5 si cada uno recibiera 10 fichas y el número de fichas sobrantes sería mayor que 5 si cada uno recibiera 9 fichas. □

3. El profesor Luminix quiere conocer el código de apertura de una puerta. Nadie le quiere decir cuál es, pero recibe la siguiente información:

(a) Es un número de 5 cifras.

(b) La última cifra es 3, 6 ó 7.

(c) La suma de las dos primeras cifras es 13.

(d) La cuarta cifra es impar.

(e) La suma de la primera y de la última cifra es 9.

(f) Todas las cifras son distintas y no hay 0.

(g) La suma de las cinco cifras es 21.

Encuentra el código de apertura de la puerta que necesita el profesor Luminix.

Solución. Supón que el número es $abcde$. De la segunda condición, hay tres posibilidades:

$$abcd3. \quad abcd6 \quad \text{y} \quad abcd7.$$

De la quinta condición, las tres posibilidades son:

$$6bcd3, \quad 3bcd6 \quad \text{y} \quad 2bcd7.$$

Y si ahora se aplica la primera condición, la segunda y tercera posibilidades son imposibles; por tanto, el número es

$$67cd3.$$

De las condiciones cuarta y sexta, hay dos opciones para la cifra d: 1 y 5; luego hay dos posibilidades:

$$67c13 \quad \text{y} \quad 67c53.$$

Finalmente, la última condición implica dos posibles igualdades:

$$6+7+c+1+3=21 \quad \text{y} \quad 6+7+c+5+3=21;$$

es decir, para c hay dos posibilidades:

$$c=21-17=4 \quad \text{y} \quad c=21-21=0.$$

Luego, por la sexta condición, c no puede ser igual a 0. Por tanto, la única posibilidad es que $d=1$. De donde, el número de cinco cifras que es el código de la puerta es

$$67413,$$

con el que el profesor Luminix habrá satisfecho ya su curiosidad. □

4. Hay dos cajas. En una de ellas, hay siete bolas de color negro y una de color blanco; en la otra, cinco bolas de color negro y una de color blanco. Un juego consiste en tirar una moneda balanceada y luego extraer al azar una bola de una de las cajas. Si sale “cara”, la bola debe ser extraída de la primera caja; si sale “sello”, de la segunda caja. El jugador gana si la bola seleccionada es de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Solución. El evento cuya probabilidad quieres calcular es

A: *la bola extraída es de color blanco.*

Este evento puede ser visto como la unión de otros dos eventos disjuntos:

La bola extraída es de color blanco y de la primera caja o *la bola extraída es de color blanco y de la segunda caja.*

A su vez, cada uno de estos dos eventos pueden ser expresados como la intersección de dos eventos independientes. De manera más precisa, tienes que:

$$A = (A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap S),$$

donde:

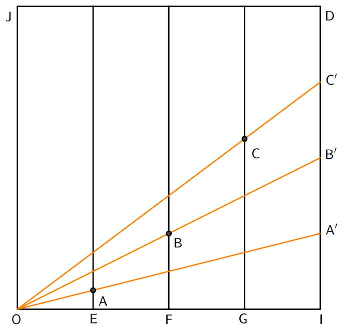
> A_1: *la bola extraída de la primera caja es de color blanco,*
> A_2: *la bola extraída de la segunda caja es de color blanco,*
> C: *la moneda muestra "cara",*
> S: *la moneda muestra "sello".*

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \mathcal{P}(A_1 \cap C) + \mathcal{P}(A_2 \cap S) \\
&= \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(A_2)\mathcal{P}(S) \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{48}.
\end{aligned}$$

En resumen, la probabilidad de ganar este juego es $\dfrac{7}{48}$. □

5. En la figura,



los segmentos de extremos O, E, F, G e I son perpendiculares al segmento $\overline{OI}$; y $\overline{JD}$ es paralelo a $\overline{OI}$. Los segmentos $\overline{OI}$ y $\overline{OJ}$ miden 1 unidad; los segmentos $\overline{OE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GI}$, $\overline{IA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'D}$ tienen la misma longitud.
Demuestra que los puntos O, A, B, C y D están sobre la parábola de ecuación $y = x^2$.

Solución. Puesto que las coordenadas de los puntos O y D son $(0,0)$ y $(1,1)$, respectivamente, estos puntos están en la parábola de ecuación $y = x^2$ pues

$$0 = 0^2 \quad \text{y} \quad 1 = 1^2.$$

Ahora bien, las abscisas de los puntos A, B y C son

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{3}{4},$$

respectivamente, pues

$$OE = EF = FG = GI = \frac{OI}{4} = \frac{1}{4}.$$

Para determinar que A, B y C están en la parábola de ecuación $y = x^2$, debes probar que las ordenadas de estos puntos son

$$\frac{1}{4^2}, \quad \frac{1}{2^2} \quad \text{y} \quad \frac{3^2}{4^2},$$

respectivamente.
En primer lugar, las ordenadas de los puntos A', B' y C' son

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{3}{4},$$

respectivamente pues

$$IA' = A'B' = B'C' = C'D = \frac{ID}{4} = \frac{1}{4}.$$

En segundo lugar, ya que $\overline{EA'} \parallel \overline{IA'}$, el teorema de proporcionalidad de Tales te permite concluir que

$$\frac{EA}{IA'} = \frac{OE}{OI};$$

es decir,

$$EA = IA' \cdot \frac{OE}{OI} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4^2}.$$

De manera similar, se tienen las proporciones siguientes:

$$\frac{FB}{IB'} = \frac{OF}{OI} \quad \text{y} \quad \frac{GC}{IC'} = \frac{OG}{OI},$$

de donde obtienes que

$$FB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2^2} \quad \text{y} \quad FB = \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3^2}{4^2}.$$

Por tanto, los puntos A, B y C están en la parábola de ecuación $y = x^2$. □

6. Si

$$2^{5a} = 2016, \quad 3^{2b} = 2016 \quad \text{y} \quad 7^c = 2016,$$

¿cuál es el valor de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}?$$

Solución. Puesto que

$$2^{5a} = \left(2^5\right)^a \quad \text{y} \quad 2^{2b} = \left(2^2\right)^b,$$

tienes que

$$2^5 = 2016^{\frac{1}{a}}, \quad 3^2 = 2016^{\frac{1}{b}} \quad \text{y} \quad 7 = 2016^{\frac{1}{c}}.$$

Por tanto,

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

de donde, como

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 32 \cdot 9 \cdot 7 = 2016,$$

tienes que

$$2016 = 2016^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}};$$

es decir,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

□

TERCER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. Uno de los doce trabajos que debía realizar Heracles para pagar sus pecados era limpiar el establo del Rey Augías. El establo era un cuadrado de 100 metros de lado. Heracles podía limpiar diariamente 1 000 metros cuadrados del establo con toda su fuerza. Al terminar el primer día de labores, la diosa Hera decidió incrementar el lado del establo 100 metros cada noche para prolongar el trabajo de Heracles. Al enterarse de esto, Zeus decidió ayudar a su hijo y cada noche añadió al área limpia otra igual al área que Heracles había limpiado el día anterior aumentada en la misma proporción en que el área total del establo había aumentado por la acción de Hera.

   Si N es el número de día en el que Heracles completara la tarea, demuestra que

$$\left\lfloor 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right\rfloor = 10.$$

Demostración. Nota que en la mañana del día n el establo es un rectángulo de dimensiones 100 por $100n$ metros; es decir, su área es $10000n$ metros cuadrados.

Para la mañana del día n, con $n \geq 2$, el establo incrementó su área en una proporción de

$$\frac{10000n}{10000(n-1)} = \frac{n}{n-1},$$

con respecto al día anterior. Por tanto, el área que está limpia al terminar el día n es

$$x_n = 1000 + \frac{n}{n-1}x_{n-1},$$

para $n \geq 2$ y con $x_1 = 1000$. Procediendo de manera recurrente, tienes que:

$$\begin{aligned}
x_n &= 1000 + \frac{n}{n-1}x_{n-1} \\
&= 1000 + \frac{n}{n-1}\left(1000 + \frac{n-1}{n-2}x_{n-2}\right) \\
&= 1000\left(1 + \frac{n}{n-1}\right) + \frac{n}{n-2}x_{n-2} \\
&= 1000\left(1 + \frac{n}{n-1}\right) + \frac{n}{n-2}\left(1000 + \frac{n-2}{n-3}x_{n-3}\right) \\
&= 1000\left(1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2}\right) + \frac{n}{n-3}x_{n-3} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1000\left(1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{2}\right) + nx_1 \\
&= 1000n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, Hércules terminará de limpiar el establo el día en que el área que ha limpiado sea mayor que el área total del establo, es decir siempre que suceda

$$
10000n \leq 1000n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right),
$$

lo cual equivale a

$$
10 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.
$$

Por tanto, por la definición de N y de esta desigualdad, puedes concluir que

$$
\left\lfloor 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right\rfloor = 10. \qquad \square
$$

2. Si

$$
s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{y} \quad r_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{n+2}},
$$

demuestre que

$$
\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} r_k.
$$

Demostración. Por un lado, tienes que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k+2} \frac{1}{n} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n} + \frac{1}{k+1}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right);
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{4},$$

ya que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+2} = 0.$$

Por otro lado, si r es un número real, entonces para todo número natural mayor o igual que 1, tienes que

$$1 - r^{k+1} = (1-r)(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^k) = (1-r^{k+1})\sum_{n=0}^{k} r^k,$$

de donde resulta que

$$\sum_{n=0}^{k} r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}.$$

Con la ayuda de esta igualdad, tienes que

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{n+2}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1\right]. \end{aligned}$$

Por tanto, se deriva que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} r_k &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} - 1\right] \\ &= \frac{1}{4}[2-1] = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 0$$

pues $\frac{1}{2} < 1$.

En resumen,

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} r_k.$$

□

3. Demuestra que no es posible representar el número 15 como la suma de los cuadrados de tres números racionales. Dicho de otra manera, demuestra que

la ecuación

$$15 = a^2 + b^2 + c^2 \tag{.1}$$

no tiene solución en el conjunto de los números racionales; es decir, no existen a, b y c, números racionales, tales que se verifique la igualdad (.1).

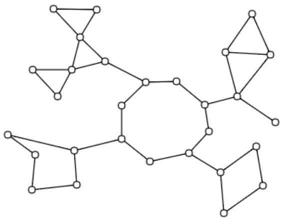
Solución. La igualdad (.1) es equivalente a

$$d^2 + e^2 + f^2 = 15h^2$$

donde d, e, f y h son enteros positivos que no tienen divisor común. Módulo 8, los cuadrados son siempre iquales a 0, 1 o 4. Así, en el lado izquierdo tenemos una suma de tres números del conjunto $\{0, 1, 4\}$, mientras que en el lado derecho módulo 8 tenemos 0, 4 (si d es par) o 7 (si d es impar). Para poder representar 0, 4 en el lado izquierdo, hay que sumar $0 + 0 + 0$ o $0 + 0 + 4$. Pero en este caso, ambos lados son pares lo que es imposible. Además, 7 es imposible de ser representado en el lado izquierdo.

Así vemos que no existe solución. □

4. En la figura



se muestra un **grafo**; es decir, un conjunto de **puntos** y **aristas**. Cada punto representa un sitio y cada arista un camino que conecta dos sitios. Caperucita Roja y Lobo Feroz pueden ocupar dichos sitios y recorrer tales caminos. Y, como siempre, Caperucita Roja intenta que Lobo Feroz no la coma. Ambos han acordado moverse en este "grafo" bajo la siguientes reglas.

Cada uno se mueve por turnos de acuerdo con un tiempo $t \geq 1$, donde t es un número entero. En cada turno pueden moverse por una arista hacia un vértice adyacente o quedarse quietos y permanecer en el vértice en el que estaban. Cuando t es impar, se mueve Caperucita Roja y cuando t es par, es el turno de Lobo Feroz.

Antes de empezar la persecución, Lobo Feroz debe escoger un sitio (un punto) desde donde tratará de alcanzar a Caperucita Roja y comérsela. Inmediatamente después de que Lobo Feroz haya elegido su posición inicial, Caperucita Roja también escogerá un punto de partida.

—Independientemente de la posición inicial que escojas y los movimientos que hagas —dice Caperucita Roja a Lobo Feroz desde una distancia prudencial—, yo puedo escoger mi posición inicial y hacer mis movimientos de tal forma que en ningún momento en que el turno sea tuyo, estarás a una *distancia* de mí menor que 3 en ese momento.

Decimos que Lobo Feroz está a una **distancia** d de Caperucita Roja si el camino más corto entre ellos contiene d aristas.

El Lobo responde:

—No lo creo querida niña. Independientemente de donde tú y yo decidamos comenzar, me puedo asegurar de que en algún momento en que el turno sea mío, estaré a una distancia menor o igual a 3 de ti y, quizá, eso baste para comerte.

(a) Demuestra que Caperucita Roja tiene razón.

(b) Demuestra que Lobo Feroz también tiene razón.

Solución. **Caperucita tiene razón**:

Llama P al octógono central, que es el *circuito simple* (colección $v_0, v_1, \dots, v_n$ de vertices *distintos entre sí*, excepto por $v_0 = v_n$) más grande del grafo.

La estrategia de la Caperucita es la siguiente:

(a) Si el Lobo decide empezar en un vértice de P, la Caperucita escoge el vértice opuesto.

(b) Si el Lobo comienza fuera de P, existe un único vértice v_0 de P tal que hay un camino entre v_0 y el Lobo sin usar aristas de P. La Caperucita se coloca en el vértice opuesto a v_0.

(c) Si el Lobo avanza a un vértice fuera de P en $t = 2l$, la Caperucita se queda quieta en $t = 2l + 1$.

(d) Si el Lobo avanza a un vértice v de P en $t = 2l$, la Caperucita avanza al vértice opuesto a v en P en $t = 2l + 1$

Esta estrategia asegura que la Caperucita se mantiene siempre a una distancia mínima de 3 porque en cualquier momento:

- Si el Lobo está fuera de P, la Caperucita está obligatoriamente en el vértice de P opuesto al *único* vértice de P por el que el Lobo puede acceder a P, y la distancia mínima es entonces 3.
- Si el Lobo entra a P, la Caperucita estará en el vértice opuesto, por el argumento anterior. La estrategia entonces asegura que en cada turno ($t = 2l$) el Lobo se mueve dentro de P, acercándose a una distancia de 3 de la Caperucita, y esta puede alejarse 1 en el siguiente turno ($t = 2l + 1$) al ir al vértice en dirección opuesta a la elección del Lobo.

Lobo Feroz tiene razón:

La idea es simplemente que el Lobo “siga el mismo camino"que la Caperucita. Supongamos que el Lobo escogió el vértice v_1 y la Caperucita escogió w_1 para comenzar. Sea d la distancia entre el Lobo y la Caperucita (es decir el menor número de aristas en un camino de v_1 a w_1). Escogemos un camino (pueden existir varios) de longitud d entre v_1 y w_1. Llamémoslo $v_0, v_1, \dots, v_d$ y lo pintamos de rojo. Suponiendo que la Caperucita va pintando las aristas por las que avanza de rojo, la estrategia del Lobo es seguir el camino rojo. Para ser precisos, supongamos que la Caperucita avanza por $w_1, w_2, w_3, \dots$. La estrategia para el Lobo es seguir el camino $v_1, v_2, \dots, v_d, w_1, w_2, \dots$.

Para ver por qué este argumento es correcto, por facilidad renombramos $w_1 = v_{d+1}, w_2 = v_{d+2}, \dots$. Sea $t = 2k - 1$ el primer momento en que el camino rojo se interseca a sí mismo, es decir el menor $t = 2k - 1$ en que la Caperucita avanzó a un vértice $v_{k+d} = w_k = v_i$, para algún $i < k + d$. Entonces

$v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k+d} = v_i$ es un ciclo de vértices. Por la definición de ser el primer momento en que esto ocurre, estos vértices son distintos, es decir forman un circuito simple (esto es, que no se cruza a sí mismo). Sin embargo, sabemos que el circuito simple más grande del grafo tiene longitud 8. Por tanto $(k+d) - i \leq 8$, es decir, el Lobo y la Caperucita están en un mismo circuito de longitud a lo sumo 8, por lo que es claro que la distancia entre ellos es a lo sumo 4. En el siguiente turno, $t = 2k - 1$, el Lobo puede entonces reducir esta distancia a 3 e intentar comer a la Caperucita. □

5. Para cada numero natural n, se definen $f(n)$ y $g(n)$ de la siguiente manera:
   (a) $f(n)$ es la longitud (número de cifras) del menor número natural cuyas cifras suman n; y
   (b) $g(n)$ es la cantidad de números de longitud $f(n)$ cuyas cifras suman n.

   Por ejemplo, $f(25) = 3$ ya que 799 es el menor número natural cuyas cifras suman 25; y $g(26) = 6$ porque hay 6 números (799, 979, 997, 889, 898, 998) de longitud $f(26) = 3$ cuya cifras suman 25.

   Calcula
$$g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(99).$$

Solución. Vemos que $f(n) = \lceil \frac{n}{9} \rceil$.

Sea $h(n)$ el residuo de dividir n por 9 ($0 \leq n \leq 8$). Entonces, $g(n)$ puede visualizarse como el número de formas en que se pueden restar $h(n)$ unos de las cifras de $9 \ldots 9$, donde hay $f(n)$ nueves. Por ejemplo, para $n = 25$, $g(25) = 6$ es el número de formas de restar $h(25) = 3$ unos de las cifras de 999.

Esto es equivalente a calcular de cuantas formas se pueden colocar $h(n)$ bolitas en $f(n)$ cajas, para lo cual se puede aplicar la fórmula de bolas en urnas. Concluimos que $g(n) = \binom{h(n)+f(n)-1}{f(n)-1}$.

Escribiendo $S := g(1) + \cdots + g(99)$ tenemos entonces:

$$S = \left(\binom{8}{0} + \cdots + \binom{0}{0}\right) + \left(\binom{9}{1} + \cdots + \binom{1}{1}\right) + \cdots + \left(\binom{18}{10} + \cdots + \binom{10}{10}\right)$$

Utilizando que $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} \cdots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$ (lo cual se puede deducir de contar como elegir $n+1$ elementos de $\{1, \ldots, m+1\}$, distinguiendo por casos según cuando el elemento máximo es $i = n, n+1, \ldots, m+1$, lo que contribuye $\binom{i-1}{n}$ a la suma) concluimos:

$$S = \binom{9}{1} + \binom{10}{2} + \cdots + \binom{19}{11}$$

$$\Rightarrow S = \binom{9}{8} + \binom{10}{8} + \cdots + \binom{19}{8}$$

Utilizando la misma fórmula nuevamente, esto es

$$S = \binom{20}{9} - \binom{8}{8} = \binom{20}{9} - 1$$

□