XVII Edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Junio 2022

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Comisiones para la elaboración de las preguntas de la XVII edición de la Olimpiada Matemática
Coordinador General: Fernando Gómez.
Categoría infantil, niveles 1 y 2: Ramiro Torres (coordinador), Sandra Gutiérrez, Fernanda Salazar.
Categoría juvenil, nivel 1: David Hervas (coordinador), John Skukalek, Israel.
Categoría juvenil, nivel 2: Eduardo Alba (coordinador), Nicola Di Teodoro, Luis Fernando Torres.
Categoría juvenil, nivel 3: Fernando Gómez (coordinador).

Sedes de la XVII edición de la Olimpiada Matemática
Quito
Escuela Politécnica Nacional (Categoría Infantil)
Universidad San Francisco de Quito (Categoría Juvenil)

Cuenca
U.E. Técnico Salesiano

Guayaquil
Escuela Politécnica del Litoral

Ibarra
UEI Pensionado Atahualpa

Latacunga
Universidad Técnica de Cotopaxi .

Portoviejo
Universidad Técnica de Manabí .

Tulcán
Universidad Politécnica Estatal del Carchi .

Loja
Universidad Técnica Particular de Loja

Página web de la SEdeM
Vladimir Ramírez.

Desarrollo del sistema web de la SEdeM
Vladimir Ramírez.

Instituciones colaboradoras
Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad Técnica Particular de Loja, UE Técnico Salesiano, UEI Pensionado Atahualpa, Universidad Técnica de Cotopaxi, Escuela Politécnica del Litoral, Universidad Técnica de Manabí, Universidad Politécnica Estatal del Carchi y Olimpiada Matemática Ecuatoriana OMEC.

Edición de esta compilación: Fernando Gómez y Nicola Di Teodoro
Edición de las pruebas de las Olimpiadas: Fernando Gómez y Nicola Di Teodoro
Preparación del documento en LaTeX: Fernando Gómez y Nicola Di Teodoro
Diseño de la portada: Julio Erazo
Primer tiraje: 200 ejemplares.
Junio 2022

Colaboradores

La SEdeM agradece enormemente a los colaboradores de este evento por su ardua labor ya que sin su ayuda no sería posible ejecutarlo.

Colaboradores por Sede de la XVII edición de la Olimpiada Matemática

Universidad San Francisco de Quito - Quito
Carlos Jiménez, David Hervas, Victor Herrera, Alejandra Guerrón, John Skukalek, Julio Ibarra, Julio Ortega, Patricio Valencia, Pavel Alba, Servando Espin, Svetlana Arbakova, Vladimir Rodriguez, María Isabel Martínez Castillo, Juan Sebastian Romero, Gustavo Perla, Natalia Luciani, Adrian Vasconez, Patricio Zurita, Ricardo Lopez, Israel Cevallos, D'Hamar Agudelo, Andrea Mosquera, Pablo Padilla, Ricardo David Mayorga Bayas, Anna Michelle Proaño Barrientos, Nícolas Jared Villagrán Klerque, Carla Sanchez, Arody Nahat Carlosama Morales, Hugo Gavilimia, Yuliana Montalvo, Roberto Alvarado, Victor Bastidas, Martin Velasco, Cristian Santiago Guasgua Betancourt, Daniel Herrera, María Del Carmen Villegas Alava, Leonardo Isaí Jácome Luzpa, Maeva Flores, Teresa Matos, Anabelle Chacón, Antonio Di Teodoro, Katia Bolaños, Eduardo Alba, Susana Coronel, Paulina Cruz, Santiago Rojas, Isabel Mogro, Betty Landazuri, Fernando Gómez

U.E. Técnico Salesiano - Cuenca
Carmen Delgado, Josué Abad, Francisco Ortiz.

Escuela Politécnica del Litoral - Guayaquil
Guillermo Baquerizo, Wilfredo Angulo, Elvis Aponte, Franca Laveglia, Elimar Marchan, Fernando Mejias, Liliana Pérez, Luz Rodríguez, Jorge Vielma, Cecilia Vacacela, Billy Banchón, Marco Estrada, Cristina Lorenti, Jhixon Macías, Alexander Palma, Melissa Quimis, Ruben Vera, Marcos Ruiz.

UEI Pensionado Atahualpa - Ibarra
Anderson Javier Pule Velasquez, José Roberto Bossano Cueva, Byron Geovanny Cajas Narváez, Silvia Alexandra Viveros Morales, Harold Octavio Ceballos Páez, Geovanna del Rocío Andrade Tapia, Juan Carlos Salas Subía.

Universidad Técnica de Cotopaxi - Latacunga
Jessica Castillo, Xiomara Zambrano, Cristian Eugenio, Víctor Medina Matute, Hernán Yáñez Ávila.

Universidad Técnica de Manabí - Portoviejo
Roxana Panchana, José Cevallos, Ulbio Durán, Carlos Aray, Alba Alay, Fredy Rivadeneira, Mónica Barreiro, Rosalba Bravo, Carmen Judith Vanegas, Carlos Vélez, Luis Zambrano, Yandri Guerrero, Glay Cedeño, Edward Gutiérrez, Emanuel Muñoz, Francis Gorozabel, Francisco Omar Cedeño, Oswaldo Larreal.

Universidad Técnica Particular de Loja - Loja
José Edmundo Sánchez Romero, Osler Querubín Valarezo Marín, Mónica Cleotilde Herrera Solorzano, Wilson Elías Guanoquiza Cando, Antonio Arquímides Ramírez González, Reinaldo Antonio Guerrero Chirinos, Marco Antonio Ayala Chauvin, Henry Daniel Quezada Lozano, Nora Esperanza Parra Celi, Luis Alberto Cuenca Macas.

Índice general

Presentación

Este documento contiene los ejercicios y soluciones de las pruebas de la XVII edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática (SEdeM). El material que ponemos a vuestra disposición es fruto de un enorme esfuerzo por parte de un grupo de miembros y colaboradores de nuestra Sociedad, quienes comprometidos con los objetivos de la misma, desarrollan problemas matemáticos que despierten el interés, el ingenio y la creatividad de los los niños y jóvenes que participan en este evento.

Por otro lado, estamos muy contentos de que en esta edición, en particular, no solo se haya podido abrir una sede en la ciudad de Guayaquil, sino que también algunos niños y jóvenes de esta ciudad hayan logrado una destacada participación.

Además, es pertinente agradecer a todas las instituciones auspiciantes: Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad de Cuenca, Universidad Técnica Particular de Loja, Proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Olimpiadas Matemática Ecuatoriana, Logos Academy y a las personas que en ellas permitieron que las pruebas se hayan desarrollado con éxito.

Finalmente, hay que felicitar a los ganadores de estas Olimpiadas. Ojalá muchos de ellos, conscientes de sus destrezas y deseo propio, opten por la Matemática como una profesión.

Nicola Di Teodoro
Presidente de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

Cuadro de honor de la XVII Edición

Primer Nivel Infantil

ORO	Enríquez Calle Matías Gabriel Ricardo Gabriel Enríquez Delgado - SANGOLQUÍ
ORO	Bonilla De La Torre Matías Napoleón INTISANA - QUITO
ORO	Ortega Fradique Rodrigo Andreth INTISANA - QUITO
ORO	Sánchez Páez Martín Eduardo UEB TORREMAR - DAULE
ORO	Burgos Ullaury Joaquín Alejandro UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
PLATA	Regalado Solís Gabriel Santiago INTISANA - QUITO
PLATA	Morocho Vera Emilio Nicolás CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO
PLATA	López Celi Emilio Nicolás UEP SAN GERARDO - LOJA
PLATA	Saltos Garcés Samuel TERRANOVA - QUITO
BRONCE	Cueva Contento Doménica Dai UEP SAN GERARDO - LOJA
BRONCE	Castro González Carlos Isaías UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
BRONCE	Andrade Flores Julia Sofía THE HIGHLANDS SCHOOL QUITO - PUEMBO
BRONCE	Maldonado Lara Fátima CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO
BRONCE	Mencías Marín Gabriel Alejandro INTISANA - QUITO
BRONCE	Castillo Inca Dylan Adahir EBP DIRIGENTES DEL FUTURO - LOJA

Segundo Nivel Infantil

ORO	Esparza Cárdenas Thomas Emiliano UE SAN FRANCISCO - IBARRA
ORO	Songor Torres Valeria Abigail PUNTO DE PARTIDA - LOJA
ORO	Morocho Vera Joaquín Mauricio CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO
ORO	Gómez Pino Santiago UEB TORREMAR - DAULE
PLATA	Hirose Borja Kiyoshi Daniel UE SAN FRANCISCO - IBARRA
PLATA	Crausaz Carranza Juan Pablo UEB TORREMAR - DAULE
PLATA	Bedón Ramírez Carlos Matías UE STELLA MARIS - MANTA
PLATA	Alonso Parada Maximiliano Andrés UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
PLATA	López Arellano Alicia THE HIGHLANDS SCHOOL QUITO - PUEMBO
PLATA	Redrovan Cabrera Abby Ayelen UEP DEL PACÍFICO - MACHALA
BRONCE	Neira Pineda Dennis Camilo UEP SAN GERARDO - LOJA
BRONCE	Melo Chancay Javier Antonio LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Moreno Manrique Sergio Andrés UEB TORREMAR - DAULE
BRONCE	Brito Sigcha Eduardo Nicolás UE ZARÁN - QUITO
BRONCE	Orellana Rojas Carlos José PUNTO DE PARTIDA - LOJA
BRONCE	Patiño Donoso Ana María CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO
BRONCE	Tobar Herrera Bernardo Andrés TERRANOVA - QUITO
BRONCE	Balseca León María Eduarda CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO
BRONCE	Montenegro Utreras Sofía Rhianna ISM QUITO - QUITO

MENCIONES HONORÍFICAS - INFANTIL 1

Tamayo Ortega Pedro Ignacio
COLEGIO CERVANTES - QUITO

Vega Yánez Victoria
ISM QUITO - QUITO

Orbe Barreiro Victoria Mikaela
TERRANOVA - QUITO

Riofrío González Víctor José
Sandra Elizabeth González Palacios - LOJA

Yasbek Romero Pablo Jossé
UEP SAN GERARDO - LOJA

Blacio Chávez Sarahí
UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL

Punina Subía Agustín Francisco
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

Ballesteros Jácome Isabela Maria
COLEGIO CERVANTES - QUITO

Moya Suárez María Canela
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

Aguilera Córdova Ivanna Edurne
UEB EDUCAMUNDO - LA AURORA

Cortés Moncayo José David
UEP EL SAUCE - QUITO

MENCIONES HONORÍFICAS - INFANTIL 2

Vera Alvarez Hilder Matías
INTISANA - QUITO

Hidalgo Estrada Juan Sebastián
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

Arichabala Salazar Leonardo Joaquín
JACINTO JOAQUIN ARICHABALA CONCHA - QUITO

Pontón Rodríguez Juan Manuel
INTISANA - QUITO

Ortega Castillo Joaquín Alejandro
PUNTO DE PARTIDA - LOJA

Ivanov Endara Julián Slavchev
UEP EL SAUCE - QUITO

Aguilera Córdova Daniel Eduardo
UEB EDUCAMUNDO - LA AURORA

Ponce Álvarez Lucía Mercedes
UEP EL SAUCE - QUITO

Cueva Piedra Ariel Fernando
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

Zaldumbide Dávalos Elías
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

Vázquez Vargas Cristian Alejandro
EDUARD SPRANGER - IBARRA

Valdiviezo Sandoval Aaron Vicente
PUNTO DE PARTIDA - LOJA

PRIMER NIVEL JUVENIL

ORO	Villamagua Camacho Nuria CBP ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
ORO	Bermúdez Salvatierra Rommel Paúl UE ZARÁN - QUITO
ORO	Perez Guerrero Jefferson Andres UE SAN FRANCISCO - IBARRA
PLATA	Laso Villavicencio Amelia COLEGIO AMERICANO - QUITO
PLATA	Erazo Reyes David Joaquín INTISANA - QUITO
PLATA	Cuesta Arias Analía ATENAS - AMBATO
PLATA	Ponce Loaiza Ivan Jair UEF SAN FRANCISO DE ASÍS - ZAMORA
PLATA	Zambrano López Victoria Isabella UE STELLA MARIS - MANTA
BRONCE	Herrera Villacís Mathias Patricio INTISANA - QUITO
BRONCE	Paz Montero Juan Andrés CBP ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
BRONCE	Pérez Flores Emilio José UEB TORREMAR - DAULE
BRONCE	Noblecilla Barcia Diego Alejandro UEB TORREMAR - DAULE
BRONCE	Vizcaino Macancela Amir Antonio LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Barreto Guarnizo Paul Sebastian UE DEL PACÍFICO - MACHALA
BRONCE	Cevallos Correa Teo Patricio CBP ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
BRONCE	Peñaherrera Freire Martín Sebastián UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
BRONCE	Soria Vasquez Francisco Mateo UE SAN FRANCISCO - IBARRA
BRONCE	Tabango Proaño Melanny Alejandra UE INTERNACIONAL PENSIONADO ATAHUALPA - IBARRA
BRONCE	Gomez Marriott Estefano LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Rodríguez Torres María Paz UE SAN FRANCISCO - IBARRA

Segundo Nivel Juvenil

ORO	Carlosama Morales Keny Ezau UE ZARÁN - QUITO
ORO	Reyes Romero Luis Eduardo LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
PLATA	Herrera Hidalgo Jose Daniel UEP EL SAUCE - QUITO
PLATA	Gonce Quintana Wilhelm Ramón UEP SAN GERARDO - LOJA
BRONCE	Miño Armijos Jorge Adel CBP ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
BRONCE	Reyes Alvarado Melanie Nicolle UEPB SANTO DOMINGO DE GUZMÁN - GUAYAQUIL
BRONCE	Villarreal Estrada Cristina Anahi CHRISTIAN VILLAREAL - QUITO
BRONCE	Villalobos De la Torre Daniela Elisa COLEGIO AMERICANO - QUITO
BRONCE	Rodriguez Estrada Emilio Alberto UEB TORREMAR - DAULE
BRONCE	Ordóñez Diaz Jorge Mateo UEF CALASANZ - LOJA
BRONCE	Mosquera Montero Brandon Ismael UEF CALASANZ - LOJA
BRONCE	Izquierdo Petroche Amy Valentina LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Bustamante Montesdeoca Alex Martín UEB TORREMAR - DAULE
BRONCE	Adum Coronado Roberto José LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Pacheco Bravo Samuel Antonio UE ARCO IRIS - PORTOVIEJO
BRONCE	Romero Freire Juan Pablo UEP DEL PACÍFICO - MACHALA
BRONCE	Pabon Vallejos Samantha Simone UE SAN FRANCISCO - IBARRA
BRONCE	Carchi Poma Pablo Sebastian UEF CALASANZ - LOJA

Tercer Nivel Juvenil

ORO	Zamora Wong Emilio Alexander LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
ORO	Cueva Cabrera Henry Mateo CBP ANTONIO PEÑA CELI - LOJA
PLATA	Cevallos Robles Mauricio Andrés UEP DEL PACÍFICO - MACHALA
PLATA	Solano Pulla Iker Andres UEP DEL PACÍFICO - MACHALA
PLATA	Casierra Almeida Fernando David UE LICEO CRISTIANO - GUAYAQUIL
PLATA	Perez Carvajal Carlos Mateo UEM SEBASTIÁN DE BENALCAZAR - QUITO
BRONCE	Valarezo Oyola Natasha Fernanda LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Cárdenas David COLEGIO ALEMÁN - QUITO
BRONCE	Indacochea Rosado María José LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Wan Moreno Sebastián Andrés LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL
BRONCE	Hadweh Francesca COLEGIO ALEMÁN - QUITO
BRONCE	Gómez López Emiliano Adrián UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL
BRONCE	Escobar Zambrano David Mateo UEM SEBASTIÁN DE BENALCAZAR - QUITO
BRONCE	Cerda Morocho Adrian Camilo Leonidas Antonio Cerda Romero - GUANO

Menciones honoríficas - Juvenil 1

Pardo Quisatagsi Xilena Estefanía
CBP ANTONIO PEÑA CELI - LOJA

Quevedo Román Joaquín
INTISANA - QUITO

González Muñoz Victor Ismael
COLEGIO CERVANTES - QUITO

Contreras Lozano José Daniel
UEBP ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL

Larrea Carrasco Eduardo José
INTISANA - QUITO

Pinto Gómez Anna Sophia
COLEGIO BECQUEREL - QUITO

Miranda Toro Esteban Andrés
INTISANA - QUITO

Menciones honoríficas - Juvenil 2

Segarra Uyaguari Pablo Xavier
UET SALESIANO - CUENCA

Veintimilla Burneo Emilio José
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

López Zuñiga Sheldon Gabriel
INTISANA - QUITO

Jaramillo Manuela
COLEGIO ALEMÁN - QUITO

Larrea Reyes Alejandro José
UEB TORREMAR - DAULE

Donoso Game Juan Pablo
CATÓLICO JOSÉ ENGLING - TUMBACO

Lozano Portilla Leonardo José
Jose Manuel Lozano Morales - QUITO

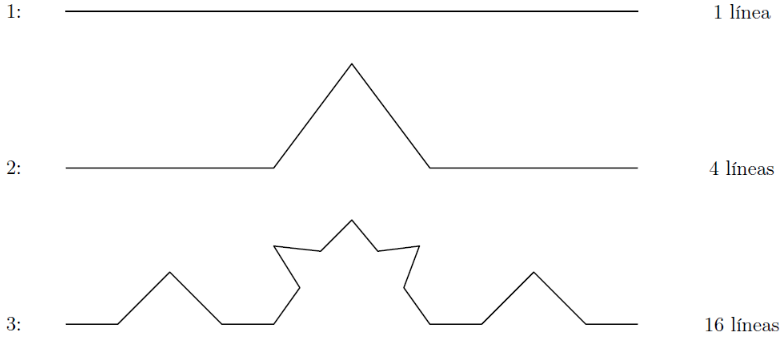
Echeverria Del Pozo José Fernando
UEB TORREMAR - DAULE

Jaramillo Cisneros Gabriel Augusto
INTISANA - QUITO

Primer Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. **Observa la sucesión de figuras a continuación, que se forman juntando un número determinado de líneas. La primera figura se forma con una línea, la segunda con cuatro y así sucesivamente. ¿Cuántas líneas tendrá la figura 5 en este patrón de construcción?**



Solución. El patrón que se observa para construir las figuras es: la siguiente figura se forma intercalando en cada línea de la figura actual un **pico** formado por dos líneas oblícuas. Así la figura dos tiene 4 líneas, la siguiente 4×4, la siguiente $4 \times 4 \times 4$, y finalmente la quinta figura tiene $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ líneas. □

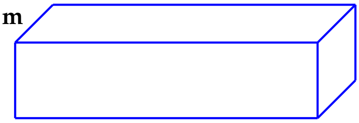
2. **En la siguiente resta cada letra representa un número entero positivo de un solo dígito.**

$$\begin{array}{cccccc} & \mathbf{6} & \mathbf{Q} & \mathbf{2} & \mathbf{S} & \mathbf{T} \\ \mathbf{-} & \mathbf{P} & \mathbf{3} & \mathbf{R} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{array}$$

¿Qué valor toma $P + Q + R + S + T$**?**

Solución. Se observa una sustracción entre los números $\overline{6Q2ST}$ y $\overline{P3R16}$. Si recordamos que la adición y sustracción son operaciones complementarias, entonces se puede deducir que $\overline{P3R16} + 22222 = \overline{6Q2ST}$, por lo tanto igualando cifra a cifra se obtiene lo siguiente: $P + 2 = 6$, de dónde se deduce que $P = 4$; por otro lado, $3 + 2 = Q$, con lo cual $Q = 5$. Además, $R + 2 = 2$, por lo tanto $R = 0$; de igual manera, $1+2=S$, entonces $S=3$. Finalmente, $6+2=T$, por lo tanto $T=8$. Así la suma $P+Q+R+S+T=4+5+0+3+8=20$. □

3. **Una piscina tiene la forma que se describe en la siguiente figura:**



Un grifo abierto llena con agua la piscina (desde arriba) a razón de 1 litro por segundo ¿En cuántas horas se llena completamente la piscina?

Solución. El volumen de la piscina es igual a $V = 8 \times 3 \times 1{,}5 = 36\,\text{m}^3 = 36000$ litros. Por tanto, la piscina se llenaría en 36000 segundos, o lo que es lo mismo, 10 horas. □

4. **Determina si la suma de los** 50 **primeros números impares es un número par o impar. Justifica su respuesta.**

Solución. Se puede notar que al sumar un número par de números impares el resultado siempre es un número par. Por ejemplo:

$$\begin{array}{lr} \text{2 números:} & 1+3=4 \\ \text{4 números:} & 1+3+5+7=16 \\ \text{6 números:} & 1+3+5+7+9+11=36 \\ & \vdots \end{array}$$

Al ser 50 un número par, entonces se puede concluir que $1+3+5+7+\ldots+99$ es un número par. □

Nota: De hecho $1+3+5+7+\ldots+99=2500$ que claramente es par.

5. **En una conversación entre dos amigos, el uno dice ayer mentí, a lo cual el otro responde ayer yo también mentí. Se conoce que de estos dos amigos el primero de ellos miente únicamente los lunes, martes y miércoles y el otro miente únicamente los jueves, viernes y sábados. ¿Qué día de la semana tuvieron esta conversación?**

Solución. Hacemos una tabla con los días de la semana en los cuales cada uno de los amigos miente y dice la verdad, así:

Amigo	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
1	miente	miente	miente				
2				miente	miente	miente	

Los espacios en blanco en la tabla, representan días en los cuales cada amigo dice la verdad. Se puede iniciar eliminando el domingo como día de conversación, puesto que el domingo ambos dicen la verdad y manifiestan cada uno que ha mentido el día anterior. Pero, se observa que el primer amigo dice la verdad los sábados, por lo tanto la conversación no pudo haber sido el día domingo. Se deduce además que necesariamente uno de los dos amigos miente el día de la conversación. Se necesita encontrar entonces un día en el cual un amigo diga la verdad, precedido de un día en el que ha mentido y el otro amigo mienta, precedido de un día en el cual ha dicho la verdad. En la tabla se puede observar que el único día que cumple con esa características es el día Jueves. Por lo tanto la conversación entre los dos amigos ha tenido lugar el día Jueves. □

Segundo Nivel Infantil

Preguntas y soluciones

1. **Dos prisioneros que actuaron juntos en un crimen son interrogados por separado. Tienen dos opciones: confesar o no confesar. Ambos prisioneros desconfían mutuamente de las acciones del otro y ninguno quiere pasar mucho tiempo en la cárcel. Se conoce que si ambos confiesan ambos recibirán dos años de cárcel cada uno. Así mismo, si ambos no confiesan, ambos recibirán cuatro años de cárcel cada uno; pero si uno confiesa y el otro no confiesa, el que confiesa queda libre y el que no confiesa paga cuatro años de cárcel. Si no pueden ponerse previamente de acuerdo en su respuesta, ¿cuál debería ser el resultado del interrogatorio y cuántos años de cárcel terminarán recibiendo?**

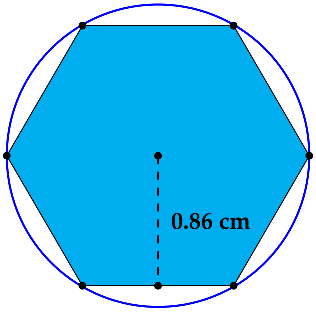
   Solución. Puesto que cada prisionero actuará de manera individual, evaluará el resultado de elegir una de las dos opciones disponibles: confesar (C) o no confesar (NC), pero sabe que el resultado de años de prisión dependerá de lo que haga su compañero, entonces empieza analizar su decisión , la cual dependerá de lo que haga su compañero, su razonamiento individual (llamémoslo prisionero 1 P1) puede ser el siguiente:

Prisionero 1	Prisionero 2	Años de prisión
C	C	Total años de prisión para P1 = 2 años de cárcel
NC	C	Total años de prisión para P1 = 4 años de cárcel
C	NC	Total años de prisión para P1 = 0 años de cárcel
NC	NC	Total años de prisión para P1 = 4 años de cárcel

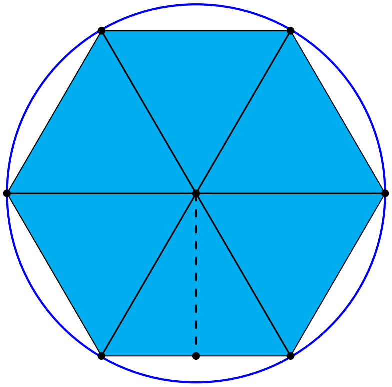
   El razonamiento del prisionero dos sería similar.
   Se puede observar que el prisionero 1, analiza que el mayor tiempo que puede pasar en la cárcel es de 4 años. Este número de años los obtiene siempre que elige la opción de no confesar, independientemente de la decisión del prisionero 2, por lo tanto la elección que le llevaría a tener menor número de años de prisión es la de confesar. Con la decisión de confesar puede obtener 2 años o 0 años de cárcel dependiendo de la decisión del otro prisionero.
   Debido a que el prisionero 2 hace el mismo razonamiento, va a llegar a la misma conclusión que el prisionero 1, es decir que es mejor elegir la opción de confesar. Por lo tanto, el resultado final será que ambos confiesan y por lo tanto ambos obtienen 2 años de cárcel. □

2. **Para un evento en su escuela usted desea llevar** 10 **galletas de forma hexagonal. En el supermercado únicamente puede encontrar masa para galletas de forma circular de diámetro igual a** 2 **cm. Sin embargo, para cumplir con su deseo se diseña un molde hexagonal y se corta las galletas circulares como se muestras en**

la figura. Determinar el área de la masa no usada (área no sombreada) y cumplir con su deseo de llevar las 10 galletas.



Solución. El hexágono inscrito en el círculo puede dividirse en 12 triángulos rectángulos de la forma indicada en la figura.



Cada triángulo tiene una altura igual a $h = 0{,}86$ cm e hipotenusa igual al radio de la circunferencia (1 cm). Usando el teorema de Pitágoras, podemos obtener el valor de la base $b = 0{,}5$. Por tanto, el área del hexágono será 12 veces el área de un triángulo:

$$\text{Área Hexágono} = 12 * \text{Área Triángulo} = 12 * (\frac{b * h}{2}) = 12 * (\frac{0{,}5 * 0{,}86}{2}) = 2{,}58 \text{ cm}^2$$

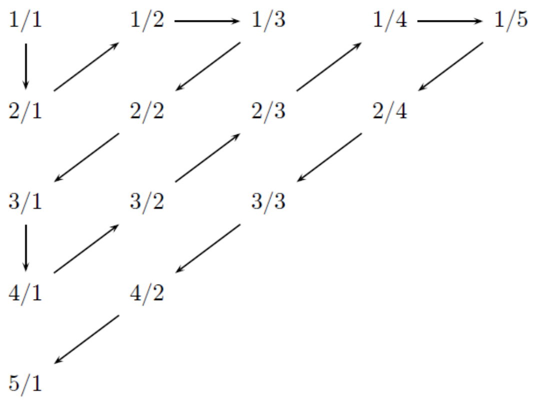
Calculando el área del círculo y restando el área del hexágono, podemos obtenemos el área solicitada, es decir:

$$\text{Área No Usada} = 10(\text{Área Círculo-Área Hexágono}) = 10(\pi * (1)^2 - 2{,}58) = 5{,}6 \text{ cm}^2$$

□

Nota: Alternativamente, se puede dividir el hexágono en 6 triángulos equiláteros, cada uno con área igual a $\frac{0{,}86 \cdot 1}{2} = 0{,}43$. Y por ende el área hexágono tiene área $6 \cdot 0{,}43 = 2{,}58 \text{ cm}^2$.

3. **El conjunto de las fracciones positivas puede se ordena como muestra la figura. Determinar el número de fracciones generadas cuando se alcanza** 1/50**.**

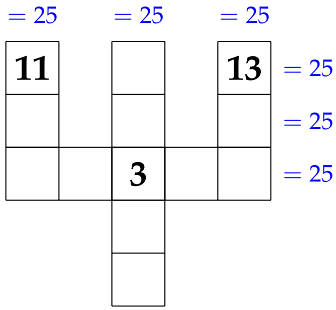


Solución. Al analizar la secuencia en forma diagonal se puede notar que se tiene igual número de fracciones igual al primer número de cada una de las filas. Cuando aparece $1/1$, únicamente se tiene un solo número, cuando aparece $2/1$, en la diagonal aparecen 2 números, y así sucesivamente. De este modo, en la diagonal asociado a la fila i de la secuencia existirán i fracciones. Sumando dichos valores hasta el valor solicitado se tiene:

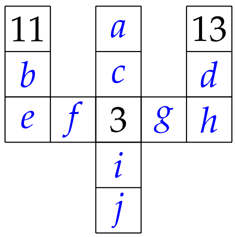
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 49 + 50$$

Sumando el primer valor con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente, se tiene $25 * 51 = 1275$. $\square$

4. **Llene los casilleros de la siguiente figura usando los números enteros del 1 al 13 tal que los números de las filas y columnas indicadas sumen 25. Se usa cada número exactamente una vez.**



Solución. Definimos los números en las casillas de la siguiente forma:



Como $a + 11 + 13 = 25$, entonces $a = 1$. Luego $c + i + j = 25 - 3 - 1 = 21$ y $e + f + g + h = 25 - 3 = 22$. La suma de los números que faltan es igual a $2 + 4 +$

$5 + \ldots + 10 + 12 = 63$. Luego $b + d = 63 - 21 - 22 = 20$. Como $b + c + d = 25$, entonces $c = 25 - 20 = 5$.
Como $b + d = 20$, ya se han usado $11, 13$, y los números son distintos, entonces los números deben ser $12, 8$ en algún orden. Si $d = 12$, entonces $h = 0$, que es imposible; por ende $d = 8$ y $b = 12$. Luego $e = 25 - 11 - 12 = 2$ y $h = 25 - 13 - 8 = 4$.
Luego $f + g = 25 - 2 - 3 - 4 = 16$ y $i + j = 25 - 1 - 3 - 5 = 16$, con $f, g, i, j \in \{6, 7, 9, 10\}$. Como $6 + 10 = 7 + 9 = 16$, entonces hay 4 posibles soluciones para el problema:

11		1		13
12		5		8
2	10	3	6	4
		7		
		9		

11		1		13
12		5		8
2	6	3	10	4
		7		
		9		

11		1		13
12		5		8
2	10	3	6	4
		9		
		7		

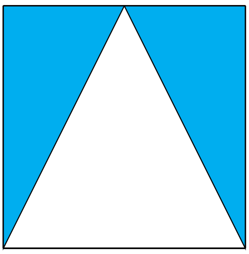
11		1		13
12		5		8
2	6	3	10	4
		9		
		7		

□

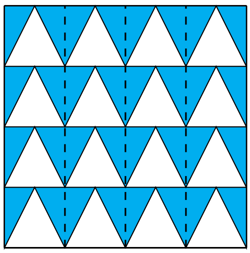
Nota: En la prueba basta hallar una de las soluciones.

5. **En las siguientes figuras, el cuadrado exterior tiene lado $l = 4$ metros. Hallar cuál de las figuras, A o B, tiene un área total de la región sombreada mayor.**

A.



B.



Solución. El área total sombreada en la figura A es igual al área de dos triángulos rectángulos de base 4 y altura 2, es decir, el área total es $2(4x2)/2 = 8$. El area total sombreada de la figura B es igual al área de 16 triángulos de base 1 y altura 1, es decir, el área total es $16(1x1)/2 = 8$. Por lo tanto, las áreas totales sombreadas de las dos figuras son iguales. □

PRIMER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. **La independencia del Ecuador fue el 24 de Mayo de 1822 y dicha fecha cumple que la suma de los dígitos del año menos la suma de los dígitos del mes y del día dan como resultado 2. Es decir,**

$$1 + 8 + 2 + 2 - (0 + 5 + 2 + 4) = 2$$

Hallar cuántas fechas cumplen con la misma propiedad en el año 2022.

Solución. Se tiene que $2 + 0 + 2 + 2 = 6$, para que la fecha cumpla con las propiedades entonces la suma de los dígitos del día y del mes deben sumar 4. El mes sólo puede ser: Enero, Febrero, Marzo, Octubre, Noviembre y Diciembre. Sea s la suma de los dígitos del día.

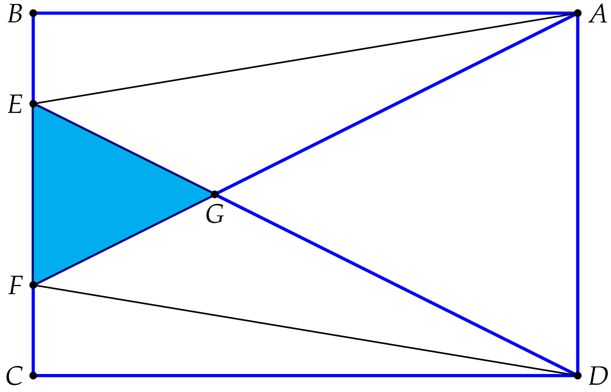
- Enero: s es igual a 3, que tiene las 4 siguientes posibilidades: 3, 12, 21, 30.
- Febrero: s es igual a 2, que tiene las 3 siguientes posibilidades: 2, 11, 20.
- Marzo: s es igual a 1, que tiene las 2 siguientes posibilidades: 1, 10.
- Octubre: s es igual a 3, que tiene las 4 siguientes posibilidades: 3, 12, 21, 30.
- Noviembre: s es igual a 2, que tiene las 3 siguientes posibilidades: 2, 11, 20.
- Diciembre: s es igual a 1, que tiene las 2 siguientes posibilidades: 1, 10.

En conclusión hay $4 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 = 18$ fechas que cumplen. □

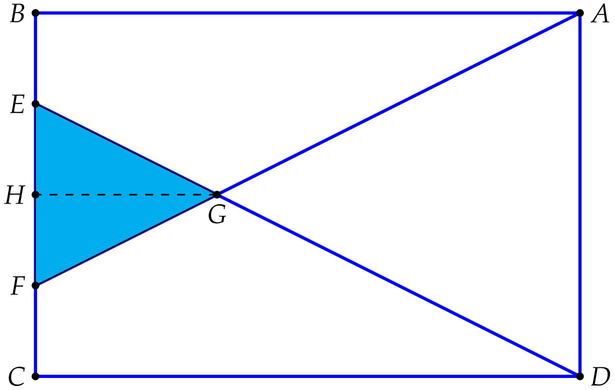
2. **Dos ranas van a competir en una carrera de saltos. La rana A es más fuerte y cada salto es de 75 cm, pero necesita 3 segundos para recuperarse antes de dar el siguiente brinco. La rana B salta 40 cm en cada salto, pero se recupera en solo 1.5 segundos antes de dar el siguiente brinco. Ambas ranas empiezan la carrera saltando al mismo tiempo.**
a) ¿Cuál rana ganará una carrera de 3 metros de distancia?
b) ¿Cuál rana ganará una carrera de 10 metros de distancia?

Solución. a) Vamos a calcular cuánto tiempo le toma a la rana A en llegar a los 3 metros. Como $3/0{,}75 = 4$, luego la rana A requiere 4 saltos para llegar a la meta y eso requiere $3(3-1) = 9$ segundos. Ahora, vamos a calcular cuánto avanza la rana B en 9 segundos. Como $1 + 9/0{,}75 = 7$, la rana B hace 7 saltos y luego avanza $0{,}4 \cdot 7 = 2{,}8$ m. Luego la rana A gana la carrera de 3 metros.
b) Vamos a calcular cuánto tiempo le toma a la rana B en llegar a los 10 metros. Como $10/0{,}4 = 25$, luego la rana B requiere 25 saltos para llegar a la meta y eso requiere $1{,}5(25-1) = 36$ segundos. Ahora, vamos a calcular cuánto avanza la rana A en 36 segundos. Como $1 + 36/3 = 13$, la rana A hace 13 saltos y luego avanza $0{,}75 \cdot 13 = 9{,}75$ m. Luego la rana B gana la carrera de 10 metros. □

3. **Sea $ABCD$ un rectángulo con $AB = 12$ y $BC = 8$. Se escogen puntos E y F sobre el segmento BC de modo que $BE = CF = 2$. Sea G la intersección de los segmentos AF y DE. Hallar el área del triángulo EFG.**



Solución. Sea H el pie de la perpendicular de G sobre BC. Por la simetría se tiene que H es el punto medio de BC, luego $HF = 2$.



El Teorema de Tales implica que

$$\frac{HG}{HF} = \frac{AB}{BF} = \frac{12}{6} = 2$$

Luego se tiene que $HG = 2HF = 4$.
Luego el triángulo EFG tiene un lado igual a 4 y su altura respectiva igual a 4, por ende tiene área igual a 8. □

4. **Josefa y Federico están participando de un juego de cartas numeradas en su clase de matemáticas. Te presentamos parte del diálogo que ocurre entre los dos:**

   - **Josefa: Adivina cuántas cartas tomé del montón.**
   - **Federico: ¿Tomaste sólo números enteros consecutivos?**
   - **Josefa: Sí, y el número menor es el -32.**
   - **Federico: Dime algo más para poder adivinar. ¿Dime el número mayor por favor?**

- **Josefa: ¡No!, así sería muy fácil adivinar. Pero te puedo decir de cuánto es la suma total de los números de las cartas. ¿Lo necesitas?**
- **Federico: ¡Si!, dime cuánto es esa suma.**
- **Josefa: 67.**
- **Federico: ¡Suficiente! Ya sé cuántas cartas tienes.**

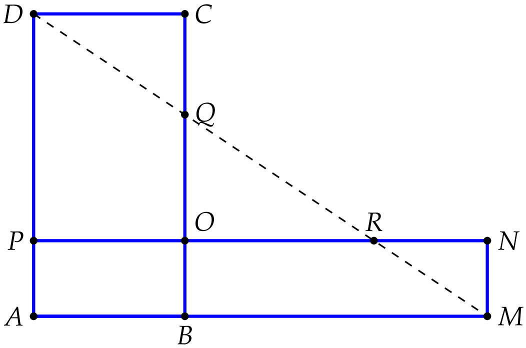
¿Cuántas cartas tomó Josefa del montón?

Solución. Sea M el valor del número más grande escrito en las tarjetas, luego $M \geq -32$. Si $M \leq 0$, entonces la suma de las tarjetas es la suma de números negativos y por ende es negativo. Luego M debe ser mayor que 0.
Si $M \leq 32$, entonces la suma

$$-32 - 31 - \ldots - 1 + 0 + 1 + 2 \ldots + M = -32 - 31 - \ldots - (M + 1) \leq 0$$

Si $M = 32$, entonces la suma es igual a 0. Es fácil comprobar que $M = 33$ obtiene una suma igual a 33 y $M = 34$ obtiene una suma igual a $33 + 34 = 67$. Luego $M = 34$.
Se concluye que hay $34 - (-32) + 1 = 67$ cartas. $\square$

5. **En la figura, el rectángulo $ABCD$ tiene $AB = 3$ y $AD = 4$ y el rectángulo $AMNP$ se construye de modo que $AP < 4$ y $AM > 3$ como muestra la figura. Se traza la recta DM que corta a los segmentos CB y PN en los puntos Q y R, respectivamente. Si los rectángulos $ABCD$ y $AMNP$ tienen la misma área, demostrar que los triángulos DCQ y RMN son congruentes.**



Solución. Como los lados correspondiente son paralelos, se tiene que los triángulos DCQ y RMN son semejantes. Basta comprobar que un par de lados correspondientes sean iguales.
Por otro lado, los triángulos ADM y CDQ son semejantes y se tiene que

$$\frac{3}{CQ} = \frac{CD}{CQ} = \frac{AM}{AD} = \frac{AM}{4}$$

$$\Longrightarrow \; CQ = \frac{12}{AM}$$

Los rectángulos $ABCD$ y $AMNP$ tienen la misma área si y sólo si $AM \cdot MN = 12$. Luego, los rectángulos $ABCD$ y $AMNP$ tienen la misma áreas si y sólo si $CQ = MN$, que son lados correspondientes en los triángulos semejantes ADM y CDQ, y por ende se concluye que éstos triángulos son congruentes. $\square$

SEGUNDO NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. **Hallar el valor de**

$$\sqrt{\frac{2\cdot 2022^6-2}{2021\cdot 2023}-\frac{2\cdot 2022^6+2}{2023^2-4044}}$$

Justificar su respuesta.

Solución. Sea $x=2022\neq 1$ y S el valor buscado, luego se tiene que

$$S^2=\frac{2x^6-2}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x^6+2}{(x+1)^2-2x}$$

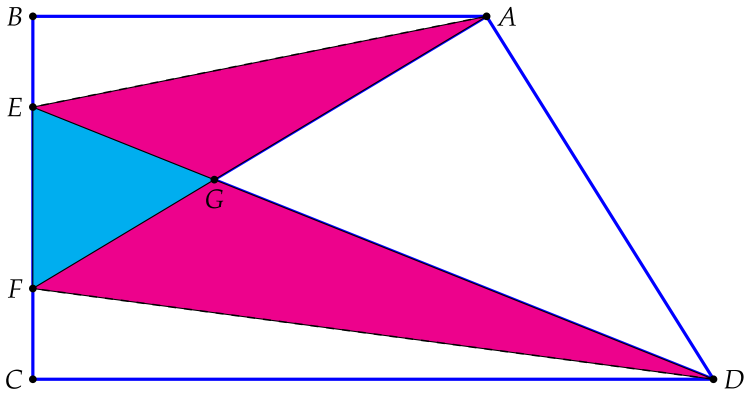
$$S^2=\frac{2(x^6-1)}{x^2-1}-\frac{2(x^6+1)}{x^2+1}=2(x^4+x^2+1)-2(x^4-x^2+1)=4x^2$$

Luego $S=|2x|=2x=4044$. □

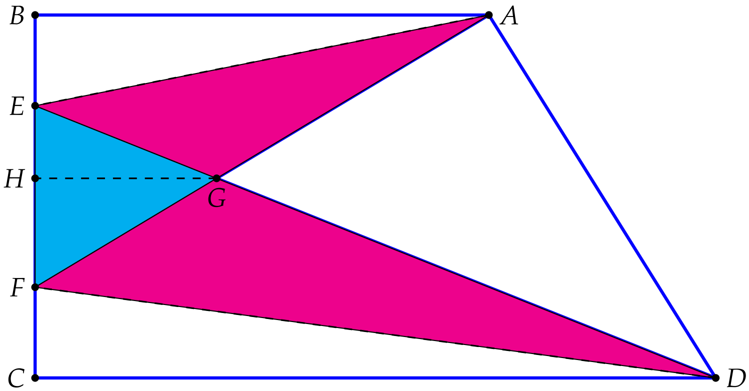
2. **Un tablero de 4×1 tiene sus casillas pintadas alternadamente con blanco y negro como muestra la figura siguiente. ¿De cuántas formas distintas se pueden escribir en las casillas del tablero los números del 1 al 4 de modo que la suma de los números en las casillas negras es igual a la suma de los números en la casillas blancas?**

Solución. Se tiene que $1+2+3+4=10$, luego la suma de los números en las casillas negras y la suma de los números en las casillas blancas ambos son iguales a 5. Para que 2 números sumen 5, deben ser una de las siguientes parejas $(1,4)$, $(2,3)$. Luego debemos escoger una pareja entre las 2 para las casillas negras, lo cual se puede hacer de 2 formas.
Una vez elegidas las parejas, se pueden permutar los 2 números de $2!=2$ formas. La misma cantidad se cumple para los números de las casillas blancas. Como los casos son independientes, entonces la cantidad de formas de llenar el tablero es $(2)^2\cdot 2=8$. □

3. **Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $\angle ABC=\angle BCD=90°$, $AB=10$, $BC=8$ y $CD=15$. Se escogen puntos E y F sobre el segmento BC de modo que $BE=CF=2$. Sea G la intersección de los segmentos AF y DE.**
a) Hallar el área del triángulo EFG.
b) Hallar las áreas de los triángulos AGE y DGF.



Solución. a) Sea H el pie de la perpendicular de G sobre BC.



Luego los triángulos GHF y ABF son semejantes y por tanto

$$\frac{HF}{BF} = \frac{GH}{AB} \implies HF = GH \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{6GH}{10} = \frac{3GH}{5}$$

Análogamente, los triángulos GEH y DEC son semejantes y por tanto

$$\frac{HE}{EC} = \frac{GH}{CD} \implies HE = GH \cdot \frac{EC}{CD} = \frac{6GH}{15} = \frac{2GH}{5}$$

Luego se tiene que

$$4 = EF = HE + HF = \frac{3GH}{5} + \frac{2GH}{5} = GH$$

Luego el triángulo EFG tiene un lado igual a 4 y su altura respectiva igual a 4, por ende tiene área igual a 8.
b) El triángulo AEF tiene área $\frac{4\cdot 10}{2} = 20$ y por ende AGE tiene área $20 - 8 = 12$. El triángulo DEF tiene área $\frac{4\cdot 15}{2} = 30$ y por ende DGF tiene área $30 - 8 = 22$. $\square$

4. **Si $2 \le n \le 2022$ es un entero, hallar cuántos valores de n cumplen que $n! \cdot (n-1)!$ sea un cuadrado perfecto.**
Nota: $n!$ es el producto de todos los números enteros del 1 al n. Por ejemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Solución. Sabemos que $n! = n \cdot (n-1)!$, luego

$$n! \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1)! \cdot (n-1)! = n \cdot ((n-1)!)^2$$

Luego $n! \cdot (n-1)!$ es un cuadrado perfecto si y sólo si n es un cuadrado perfecto. Basta contar los cuadrados perfecto entre 2 y 2022, como $2 = 1^2 + 1$ y $2022 = 45^2 - 3$, entonces hay $44 - 2 + 1 = 43$ posibilidades para n. $\square$

5. **Se denomina un número *bueno* si sus dígitos son pares y la suma de sus dígitos es igual a 6. Por ejemplo, 2022 es un número *bueno* de 4 cifras. Hallar la cantidad de números *buenos* de exactamente** 10 **cifras.**
Nota: El primer dígito debe ser distinto de 0.

Solución. Como los dígitos son pares y su suma es igual a 6, los posibles dígitos son $0, 2, 4, 6$. Como el número tiene exactamente n cifras, entonces el primer dígito debe ser distinto de 0.
Más aún, $2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 6$, luego el número tiene 3 posibilidades:

- Tiene 1 dígito igual a 6 y los restantes iguales a 0. El primer dígito debe ser 6, por ende sólo hay un número en este caso.
- Tiene 1 dígito igual a 4 y otro igual a 2 y los restantes iguales a 0. El primer dígito tiene 2 posibilidades (2 o 4) y el otro dígito distinto de 0 puede ir en cada una de las siguientes 9 cifras. Luego hay $2 \cdot 9 = 18$ posibilidades en este caso.
- Tiene 3 dígitos igual a 2 y los restantes iguales a 0. El primer dígito debe ser igual a 2 y los otros dos dígitos 2 deben ir en alguna de las 9 posiciones. Luego hay
$$\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$
posibilidades en este caso.

Luego la cantidad de números *buenos* es $1 + 18 + 36 = 55$. $\square$

Solución 2. Sea $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ un número *bueno*. Luego a_i es par para todo $1 \leq i \leq 10$, y podemos escribir $a_i = 2b_i$ para todo $1 \leq i \leq 10$ con $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Como la suma de los dígitos es igual a 6 se tiene que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = 3$$

Como el número tiene exactamente 10 cifras, entonces el primer dígito debe ser distinto de 0 y por ende $b_1 \geq 1$. Definimos $b_1 = c_1 + 1$ y $b_i = c_i$ para $2 \leq i \leq 10$, luego $c_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq 10$ y

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{10} = 2$$

Se conoce que la cantidad de soluciones de la ecuación anterior es $\binom{11}{2} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$. $\square$

TERCER NIVEL JUVENIL

Preguntas y soluciones

1. **Se sabe que el polinomio**

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7$$

tiene raíces a, b y c, y que el polinomio

$$Q(x) = x^3 + sx^2 + tx + u$$

tiene raíces $a+3$, $b+3$ y $c+3$. Hallar los valores de s, t y u.

Solución. Por el teorema de Viéte se cumple que

$$a+b+c = -3, \quad ab+bc+ca = 5, \quad abc = -7$$

$$s = -(9+a+b+c) = -6$$

$$t = (a+3)(b+3)+(b+3)(c+3)+(c+3)(a+3) = 27+6(a+b+c)+ab+bc+ca$$

$$t = 27+6(-3)+5 = 14$$

$$u = -(a+3)(b+3)(c+3) = (-3-a)(-3-b)(-3-c) = P(-3)$$

$$u = -27+27-15+7 = -8$$

Luego $s=-6$, $t=14$ y $u=-8$. □

Solución 2. Se tiene que

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$Q(x) = (x-3-a)(x-3-b)(x-3-c)$$

Luego se tiene que $Q(x) = P(x-3)$ y por ende

$$Q(x) = (x-3)^3 + 3(x-3)^2 + 5(x-3) + 7$$

$$Q(x) = (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 3(x^2 - 6x + 9) + 5(x-3) + 7$$

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 8$$

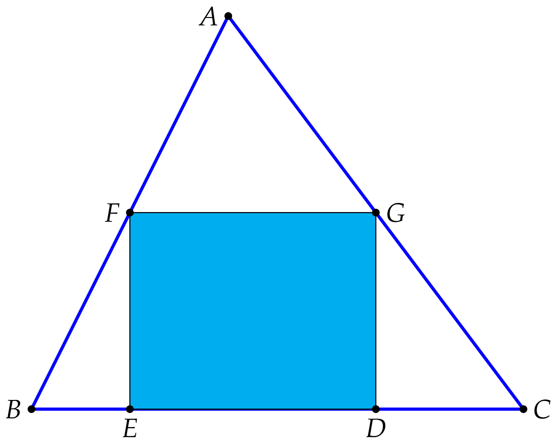
Luego $s=-6$, $t=14$ y $u=-8$. □

2. **Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno que tiene área igual 2 y el lado BC mide 1. Se eligen puntos D, E sobre el segmento BC, F sobre el segmento AB y G**

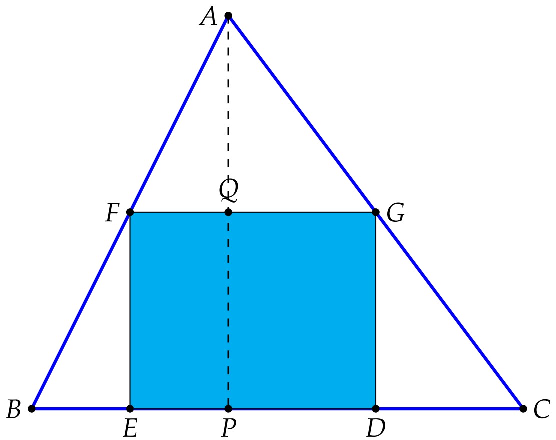
sobre el segmento AC, de modo que $DEFG$ es un rectángulo y sus lados cumplen

$$\frac{DE}{EF} = \frac{7}{4}.$$

Hallar los lados del rectángulo.



Solución. Sea P el pie de la altura del lado BC y Q la intersección de AP y FG. Sean $AP = h$, $BC = a$ y $\frac{DE}{EF} = r$.



Como $FG \parallel BC$, entonces $\triangle AFG$ es semejante a $\triangle ABC$. Luego

$$1 - \frac{EF}{h} = \frac{h - EF}{h} = \frac{AQ}{AP} = \frac{FG}{BC} = \frac{DE}{a} = \frac{r \cdot EF}{a}$$

$$EF = \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{r}{a}} = \frac{ah}{a + hr}, \quad FG = \frac{ahr}{a + hr}$$

Como $a = 1$, entonces $h = 4$ para que el área sea 2. Luego los lados del rectángulo son $EF = \frac{1}{2}$ y $DE = \frac{7}{8}$. $\square$

Solución 2. Sea A' tal que $\triangle ABC$ es isósceles y AA' es paralelo a BC. Luego $AA' \parallel FG$. Se traza un rectángulo $D'E'F'G'$ (análogo a $DEFG$) de modo que $F'G'$ pertenezca a la recta FG, luego $E'F' = EF$. Como la distancia de A' a la rectas paralelas FG y BC es constante y BC es constante, el teorema de Tales implica que $F'G' = FG$. Luego basta hallar los lados para el caso en que $\triangle A'BC$ es isśoceles.
Luego

$$\frac{E'F'}{4} = \frac{E'F'}{AP} = \frac{BE'}{BC/2} = 1 - E'D'$$

Como $E'D' = \frac{7}{4}E'F'$, reemplazando y resolviendo se tiene que $E'F' = \frac{1}{2}$ y $D'E' = \frac{7}{8}$. $\square$

Solución 3. Sea $EF = l$, luego $DE = \frac{7l}{4}$ y $DEFG$ tiene área $\frac{7l^2}{4}$. Si dos triángulos son semejantes con razón r, entonces sus áreas están en razón r^2.
Las áreas de $\triangle AFG$ y $\triangle ABC$ están en razón $(1 - \frac{l}{4})^2$, y por ende $\triangle AFG$ tiene área $2(1 - \frac{l}{4})^2$.
Juntando los triángulos BEF y CGD se obtiene un triángulo semejante a $\triangle ABC$ con razón $\frac{l}{4}$, luego la suma de las áreas de $\triangle BEF$ y $\triangle CGD$ es igual a $\frac{l^2}{8}$.
Luego sumando las áreas dentro de $\triangle ABC$ se tiene que

$$2 - l + \frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{8} + \frac{7l^2}{4} = 2\left(1 - \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l^2}{8} + \frac{7l^2}{4} = 2$$

$$l(2l - 1) = -l + 2l^2 = 0$$

Como $l > 0$, entonces $l = \frac{1}{2}$. Se concluye que $EF = \frac{1}{2}$ y $DE = \frac{7}{8}$. $\square$

3. **Hallar la factorización en números primos del número**

$$20! + 22!.$$

Nota: $n!$ **es el producto de todos los números enteros del 1 al** n**. Por ejemplo,** $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$**.**

Solución. Se tiene que

$$20! + 22! = 20! + 22 \cdot 21 \cdot 20! = 20!(1 + 22 \cdot 21) = 463 \cdot 20!$$

Se puede verificar que 463 es primo revisando que no es divisible para ninguno de los primos menores que $\sqrt{463} < 22$, es decir, revisando que $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ no dividen a 463.
Por otro lado, los divisores primos de 20! son todos los primos menores que 20: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Se concluye que todos los divisores primos de $20! + 22!$ son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 463$.
Los divisores primos $11, 13, 17, 19$ aparecen una sola vez en 20!, luego su exponente es 1. Para los otros primos el exponente es

$$\lfloor \frac{20}{2} \rfloor + \lfloor \frac{20}{4} \rfloor + \lfloor \frac{20}{8} \rfloor + \lfloor \frac{20}{16} \rfloor = 18$$

$$\lfloor \frac{20}{3} \rfloor + \lfloor \frac{20}{9} \rfloor = 8$$

$$\lfloor \frac{20}{5} \rfloor = 4$$

$$\lfloor \frac{20}{7} \rfloor = 2$$

Concluimos que

$$20! + 22! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

$\square$

4. **Se denomina un número *bueno* si sus dígitos son pares y la suma de sus dígitos es igual a 6. Por ejemplo, 2022 es un número *bueno* de 4 cifras. Hallar la cantidad de números *buenos* de exactamente n cifras, para todo entero $n \geq 3$.**

Solución. Como los dígitos son pares y su suma es igual a 6, los posibles dígitos son $0, 2, 4, 6$. Como el número tiene exactamente n cifras, entonces el primer dígito debe ser distinto de 0.
Más aún, $2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 6$, luego el número tiene 3 posibilidades:

- Tiene 1 dígito igual a 6 y los restantes iguales a 0. El primer dígito debe ser 6, por ende sólo hay un número en este caso.
- Tiene 1 dígito igual a 4 y otro igual a 2 y los restantes iguales a 0. El primer dígito tiene 2 posibilidades (2 o 4) y el otro dígito distinto de 0 puede ir en cada una de las siguientes $n - 1$ cifras. Luego hay $2(n - 1)$ posibilidades en este caso.
- Tiene 3 dígitos igual a 2 y los restantes iguales a 0. El primer dígito debe ser igual a 2 y los otros dos dígitos 2 deben ir en alguna de las $n - 1$ posiciones. Luego hay
$$\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
posibilidades en este caso.

Luego la cantidad de números *buenos* es

$$1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2n - 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\square$

Solución 2. Sea $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ un número *bueno*. Luego a_i es par para todo $1 \leq i \leq n$, y podemos escribir $a_i = 2b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ con $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Como la suma de los dígitos es igual a 6 se tiene que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 6 \quad \Longrightarrow \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 3$$

Como el número tiene exactamente n cifras, entonces el primer dígito debe ser distinto de 0 y por ende $b_1 \geq 1$. Definimos $b_1 = c_1 + 1$ y $b_i = c_i$ para $2 \leq i \leq n$, luego $c_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 2$$

Se conoce que la cantidad de soluciones de la ecuación anterior es

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

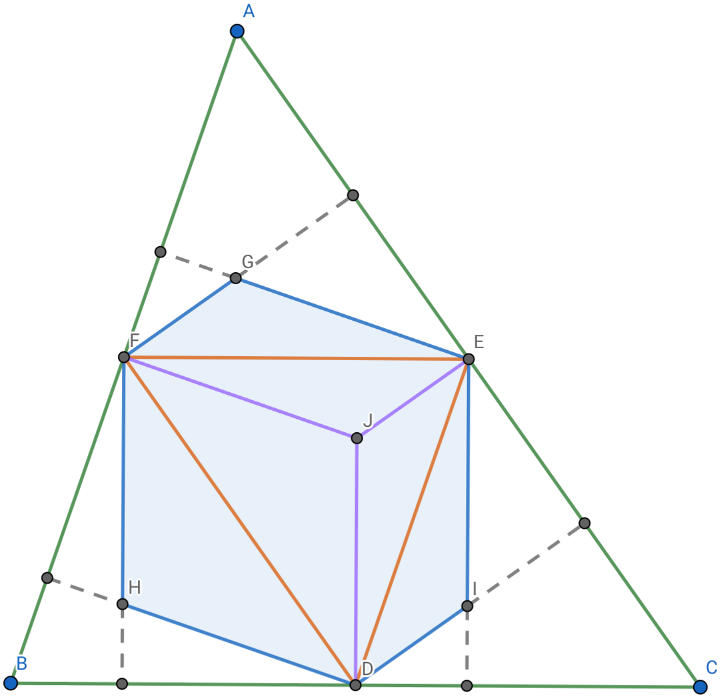
$\square$

5. **Sea ABC un triángulo acutángulo dado. Sean D, E, F los puntos medios de BC, AC, AB, respectivamente. La perpendicular de E al lado AB intersecta a la perpendicular de F al lado AC en el punto G. La perpendicular de D al lado AB intersecta a la perpendicular de F al lado BC en el punto H. La perpendicular de D al lado AC intersecta a la perpendicular de E al lado BC en el punto I. Hallar los posibles valores de**

$$\frac{\textbf{Area}(DIEGFH)}{\textbf{Area}(ABC)}$$

Solución. Como D, E, F son los puntos medios de BC, AC, AB, entonces son las paralelas medias respectivas del triángulo y por ende

$$\frac{\text{Area}(DEF)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{1}{4}$$



Como $\triangle ABC$ es acutángulo, entonces $\triangle DEF$ es acutángulo. Sea J el ortocentro del triángulo DEF, luego J está en el interior de $\triangle DEF$. Adicionalmente, DJ es perpendicular a EF, pero EF es paralelo a BC, entonces DJ es perpendicular a BC. Por construcción, EI y FH son perpendiculares a BC, luego DJ es paralelo a EI y FH. Análogamente se muestra que EJ es paralelo a FG y ID, y FJ es paralelo a EG y DH. Por lo anterior se concluye que $DJEI$, $EJFG$ y $FJDH$ son paralelogramos pues tienen sus pares de lados opuestos paralelos entre sí. En todo paralelogramo, la diagonal lo divide en dos partes congruentes. Por ende se concluye que

$$\text{Area}(DIEGFH) = \text{Area}(EGFJ) + \text{Area}(FHDJ) + \text{Area}(DIEJ)$$

$$\text{Area}(DIEGFH) = 2\text{Area}(EFJ) + 2\text{Area}(FDJ) + 2\text{Area}(DEJ)$$
$$\text{Area}(DIEGFH) = 2\text{Area}(DEF)$$

que junto con el primer resultado implica que

$$\frac{\text{Area}(DIEGFH)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{1}{2}.$$

□

Solución 2. Al igual que en la primera solución se obtiene que

$$\frac{\text{Area}(DEF)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{1}{4}$$

Sea H' el ortocentro de $\triangle ABC$.
En el triángulo AEF se tiene que EG y GF son alturas, por ende G es el ortocentro de $\triangle AEF$. Luego AG es perpendicular a EF y como EF es la paralela media, entonces AG es perpendicular a BC. Como $\triangle AEF$ y $\triangle ABC$ son semejantes con razón $\frac{1}{2}$, entonces $\triangle GEF$ y $\triangle H'BC$ son semejantes con razón $\frac{1}{2}$ y por ende

$$\text{Area}(GEF) = \frac{\text{Area}(H'BC)}{4}$$

Análogamente, se tiene que

$$\text{Area}(HDF) = \frac{\text{Area}(H'CA)}{4}, \quad \text{Area}(IDE) = \frac{\text{Area}(H'BA)}{4}$$

Además, H' está en el interior de $\triangle ABC$ ya que es actuángulo y por ende

$$\text{Area}(H'BC) + \text{Area}(H'CA) + \text{Area}(H'BA) = \text{Area}(ABC)$$

Luego sumando las expresiones anteriores se concluye que

$$\text{Area}(GEF) + \text{Area}(HDF) + \text{Area}(IDE) = \frac{\text{Area}(ABC)}{4}$$

Finalmente, se tiene que

$$\text{Area}(DIEGFH) = \text{Area}(GEF) + \text{Area}(HDF) + \text{Area}(IDE) + \text{Area}(DEF)$$

Lo cual junto con el primer resultado implica que

$$\frac{\text{Area}(DIEGFH)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{1}{2}.$$

□

Nota: G, H, I son los puntos de Euler del triángulo ABC. Por ende AG, BH y CI son concurrentes y el hexágono $DIEGFH$ es cíclico.
Nota: Si $\triangle ABC$ es rectángulo, el hexágono se convierte en un rectángulo y la proporción de las áreas se mantiene. Si $\triangle ABC$ es obstusángulo, el hexágono es no convexo; si se considera el área de la envoltura convexa de $DIEGFH$, la proporción entre áreas toma infinitos valores.