# XIV EDICIÓN DE LAS OLIMPIADAS DE LA SOCIEDAD ECUATORIANA DE MATEMÁTICA

Mayo 2017

SOCIEDAD
ECUATORIANA DE
MATEMÁTICA

# Sociedad Ecuatoriana de Matemática

**Directorio 2017**
Presidente: Diego Recalde
Vicepresidenta: Andrea Moreira
Secretario: Pedro Merino
Tesorero: Miguel Yangari
Vocales principales: Juan Carlos De los Reyes, Juan Carlos Trujillo, David Hervas, Luis Miguel Torres.
Vocales suplentes: Eduardo Alba, Andrés Merino, Sergio González, Paula Castro.

**Comisiones para la elaboración de las preguntas de la XIV edición de la Olimpiada Matemática**
Coordinador General: Miguel Yangari.
Categoría infantil, niveles 1 y 2: Ramiro Torres (coordinador), Sandra Gutiérrez, Fernanda Salazar.
Categoría juvenil, nivel 1: David Hervas (coordinador), John Skukalek.
Categoría juvenil, nivel 2: Eduardo Alba (coordinador), Thomas Reytier.
Categoría juvenil, nivel 3: Pedro Merino (Coordinador), István Mezö, Emilio Rosado.

**Sedes de la XIV edición de la Olimpiada Matemática**
Quito
Escuela Politécnica Nacional (Categoría Juvenil). Coordinador: Diego Recalde.
Universidad San Francisco de Quito (Categoría Infantil). Coordinadora: Andrea Moreira.
Cuenca
Universidad de Cuenca. Coordinadores: Kateryn Herrera, Eulalia Calle.
Guayaquil
Logos Academy. Coordinadores: Alexandra Enríquez, Julio Rivera.
Loja
Universidad Técnica Particular de Loja. Coordinadores: Paula Castro, Luis Cuenca.

**Página web de la SEdeM**
Victoria Novillo.

**Desarrollo del sistema web de la SEdeM**
Leandro García.

**Instituciones colaboradoras**
Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad Técnica Particular de Loja, Universidad de Cuenca, Proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional y Olimpiada Matemática Ecuatoriana.

**Colaboradores**
Myrian Guanoluiza, Sofía López, Erika Galíndez, Tammy Páez, Jenny Aguirre, Andrés Miniguano, Pablo Zuleta, Alexander Nénjer, Eduardo Arias, Andrea Chumaña, Andrea Ayala, Svetlana Arbakova, Katia Bolaños, Nicolás Cabrera, Juan Conde, Paola Castillo, Servando Espín, Oihane Fernández, Julio Ibarra, Ricardo López, Teresa Matos, Vladimir Rodriguez, Ulrich Schliekewe.

*Edición de esta compilación:* Juan Carlos Trujillo y Diego Recalde
*Edición de las pruebas de las Olimpiadas:* Juan Carlos Trujillo
*Preparación del documento en LaTeX:* Juan Carlos Trujillo
*Diseño de la portada:* Julio Erazo
*Primer tiraje:* 200 ejemplares.
*Junio 2017*

# Índice general

# Presentación

Este documento contiene los ejercicios y soluciones de las pruebas de la XIV edición de las Olimpiadas de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática (SEdeM). El material que ponemos a vuestra disposición es fruto de un enorme esfuerzo por parte de un grupo de miembros y colaboradores de nuestra Sociedad, quienes comprometidos con los objetivos de la misma, desarrollan problemas matemáticos que despierten el interés, el ingenio y la creatividad de los los niños y jóvenes que participan en este evento.

Por otro lado, estamos muy contentos de que en esta edición, en particular, no solo se haya podido abrir una sede en la ciudad de Guayaquil, sino que también algunos niños y jóvenes de esta ciudad hayan logrado una destacada participación.

Además, es pertinente agradecer a todas las instituciones auspiciantes: Escuela Politécnica Nacional, Universidad San Francisco de Quito, Universidad de Cuenca, Universidad Técnica Particular de Loja, Proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Olimpiadas Matemáticas Ecuatorianas, Logos Academy y a las personas que en ellas permitieron que las pruebas se hayan desarrollado con éxito.

Finalmente, hay que felicitar a los ganadores de estas Olimpiadas. Ojalá muchos de ellos, conscientes de sus destrezas y deseo propio, opten por la Matemática como una profesión.

***Diego Recalde***
Presidente de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática

# Cuadro de honor de la XIV Edición

## Primer Nivel Infantil

| | |
|---|---|
| *ORO* | Carrasco Gómez de la Torre Juan Francisco<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| *PLATA* | Del Pozo Zambrano Juan Esteban<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| *BRONCE* | Álvarez Harnisth Stefan Josué<br>COLEGIO ALEMÁN DE QUITO |
| *BRONCE* | Donoso Cárdenas José Ignacio<br>COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING - QUITO |
| Mención honorífica | Bueno Barreiro José Javier<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| Mención honorífica | Villamarín Peralta Andrés Sebastián<br>FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO |
| Mención honorífica | Landacay Neira Danna Isabella<br>ESCUELA DE EDUCACIÓN BÁSICA PARTICULAR ANTOÑO PEÑA CELI - LOJA |

## SEGUNDO NIVEL INFANTIL

| | |
|---|---|
| *ORO* | Campuzano Ruilova Marisol<br>FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO |
| *ORO* | Laso Hernández Martina<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| *PLATA* | Pico Preckler Mateo<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| *BRONCE* | Casares Bermeo Ana Carolina<br>COLEGIO MENOR SAN FRANCISCO DE QUITO |
| *BRONCE* | Rovayo Salazar Paula María<br>LICEO CAMPOVERDE DE QUITO |
| Mención honorífica | Hadweh Alteet Francesca Sheryn<br>COLEGIO ALEMÁN DE QUITO |
| Mención honorífica | Romo López Javier Emilio<br>FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO |
| Mención honorífica | Robles Enríquez Amelia Martina<br>ACADEMY QUITO |
| Mención honorífica | Muñoz Albuja Juan Andrés<br>LICEO CAMPOVERDE DE QUITO |
| Mención honorífica | Castelo Jácome Juan Bernardo<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| Mención honorífica | Barcía Guillén Miguel Ángel<br>COLEGIO ALEMÁN DE QUITO |
| Mención honorífica | Oviedo Andrade Jorge Arián<br>UNIDAD EDUCATIVA JOHANN STRAUSS - QUITO |
| Mención honorífica | Garzón Santacruz Ricardo David<br>UNIDAD EDUCATIVA EL PRADO - QUITO |
| Mención honorífica | Castellón Chiriboga Bernardo José<br>COLEGIO CATÓLIGO JOSÉ ENGLING - QUITO |

## Primer Nivel Juvenil

| | |
|---|---|
| *ORO* | Porras Dávila Juan Pablo<br>UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO |
| *PLATA* | Riascos Ortega Juan Diego<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| *PLATA* | Páez Barriga Ián Andrés<br>ISM INTERNATIONAL ACADEMY - QUITO |
| *BRONCE* | Quintanilla Bedón Xavier Alessandro<br>UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO |
| Mención honorífica | Espinosa Dávalos Esteban<br>COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING - QUITO |
| Mención honorífica | Laso Hernández Carlos Emilio<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| Mención honorífica | Serrano Granja Juan Andrés<br>COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING - QUITO |
| Mención honorífica | Donoso Game María Emilia<br>COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING - QUITO |
| Mención honorífica | Vallejo Pérez Ana Carla<br>FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO |
| Mención honorífica | Jacome Luzpa Leonardo Isai<br>ISM INTERNATIONAL ACADEMY - QUITO |
| Mención honorífica | Flores Burbano Isaac Sebastián<br>UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO |

## Segundo Nivel Juvenil

| | |
|---|---|
| *ORO* | Mendoza Vásconez Sebastián Nicolás<br>COLEGIO AMERICANO DE QUITO |
| *PLATA* | Vallejo Pérez Sebastián<br>FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO |
| *BRONCE* | Zabala Pablo Martín<br>FUNDACIÓN LICEO INTERNACIONAL - QUITO |
| Mención honorífica | Guerrero Altamirano Eduardo Humberto<br>UNIDAD EDUCATIVA HONTANAR - QUITO |
| Mención honorífica | Flores Burbano Diana Paula<br>COLEGIO LOS PINOS - QUITO |
| Mención honorífica | Balladares Oleas Juan José<br>UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO |

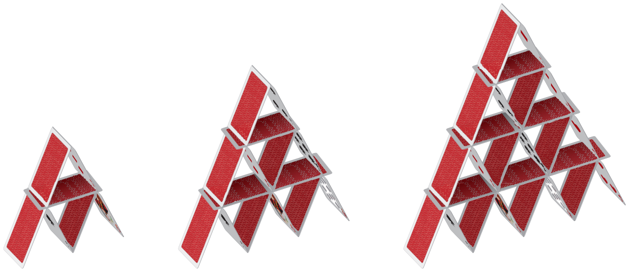
## Tercer Nivel Juvenil

| | |
|---|---|
| *ORO* | Indacochea Rosad Ana Paula<br>INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL |
| *PLATA* | Bustos Valerie<br>LOGOS ACADEMY - GUAYAQUIL |
| *BRONCE* | Ronquillo Manosalvas Diego Sebastián<br>INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL |
| Mención honorífica | Porras Dávila Daniel Sebastián<br>UNIDAD EDUCATIVA BILINGÜE PARTICULAR INTISANA - QUITO |
| Mención honorífica | Bastidas Veintimilla Roberth Humberto<br>UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR DEL PACÍFICO - MACHALA |
| Mención honorífica | Padilla Quimbiulco Diego Eduardo<br>UNIDAD EDUCATIVA EL PRADO - QUITO |
| Mención honorífica | Rodríguez Urgilez Alejandro<br>UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR DEL PACÍFICO - MACHALA |
| Mención honorífica | Carrillo Vega Ángel Adrián<br>UNIDAD EDUCATIVA PARTICULAR DEL PACÍFICO - MACHALA |
| Mención honorífica | Indacochea Rosad María Gratzia<br>INSTITUTO PARTICULAR ABDÓN CALDERÓN - GUAYAQUIL |
| Mención honorífica | Ulloa Ávila Tatiana Belén<br>COLEGIO CATÓLICO JOSÉ ENGLING - QUITO |

# Primer Nivel Infantil

## Preguntas y soluciones

1. En la figura, se muestran tres castillos construidos utilizando barajas: el primero tiene dos niveles, el segundo tres y el tercero cuatro niveles:



Siguiendo este modelo para construir castillos de barajas, imagina que vamos a construir uno que en el primer nivel tenga 12 cartas (o lo que es lo mismo, 6 triángulos). Sobre estas 12 cartas del primer nivel, deben colocarse 5 cartas horizontales que servirán de base para colocar las cartas del nivel 2. **¿Cuántas cartas necesitamos para que el castillo tenga** 6 **niveles completos?**

*Solución.* El número de cartas requeridas para construir un castillo de 7 niveles es 57.
En efecto, el castillo de dos niveles requiere de 7 cartas. Ahora bien, si observas con atención el castillo de tres niveles, este puede ser visto como un castillo que se construye al colocar un castillo de nos niveles (que corresponderían a los niveles 2 y 3) sobre una base de 6 cartas verticales y 2 horizontales. Esto quiere decir que el castillo de tres niveles tendría un total de

$$6 + 2 + 7 = 15$$

cartas.
De un modo similar, puedes contar las cartas utilizadas en el castillo de cuatro niveles: este castillo se construye al colocar sobre una base de 8 cartas verticales y 3 horizontales un castillo de tres niveles (el mismo que requiere de 15 cartas). Por tanto, el número total de cartas requeridas para un castillo de cuatro niveles es:

$$8 + 3 + 15 = 26.$$

Ya puedes adivinar cómo se construye un castillo de cinco niveles: se coloca un castillo de cuatro niveles (que tiene 26 cartas) sobre una base constituida de 10 cartas verticales y 4 cartas horizontales; es decir, un castillo de cinco niveles necesita

$$10 + 4 + 26 = 40$$

cartas.
Finalmente, el castillo de seis niveles requerirá de

$$12 + 5 + 40 = 57$$

cartas.
En resumen, se necesitan 57 barajas para construir el castillo.
El procedimiento seguido te permite obtener fácilmente una solución general a este problema. Para ello, observa en la siguiente tabla el número de cartas verticales y horizontales que tiene la base:

| Nivel | Verticales | Horizontales |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 0 |
| 3 | 6 | 1 |
| 4 | 8 | 3 |
| 5 | 10 | 4 |
| 6 | 12 | 5 |

Esto quiere decir que en un castillo de nivel $n$, con $n \geq 2$, la base tendrá $2n$ cartas verticales y $n-1$ cartas horizontales. Luego, si nombras con $C_n$ es número de cartas del castillo de $n$ niveles, obtendrás que

$$C_n = 2n + (n-1) + C_{n-1} = 3n - 1 + C_{n-1};$$

es decir, el número de cartas del castillo de nivel $n$ es igual a $3n - 1$ más el número de cartas del castillo del nivel anterior $n-1$, siempre que $n > 2$. □

2. En mi cumpleaños me regalaron un pastel de forma circular. Si Juan comió la mitad de la octava parte del pastel y Marlene comió la tercera parte de un cuarto del pastel, **¿quién comió más pastel: Juan o Marlene?**

*Solución.* Lo que comió Juan del pastel es la mitad de un octavo

$$\frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}.$$

En cambio, Marlene disfrutó de la tercera parte de un cuarto de pastel; es decir, comió

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Puesto que

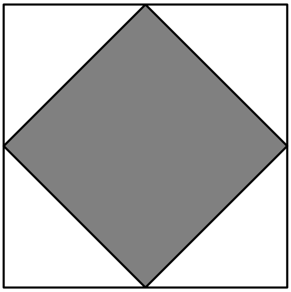
$$12 < 16,$$

se tiene que

$$\frac{1}{12} > \frac{1}{16};$$

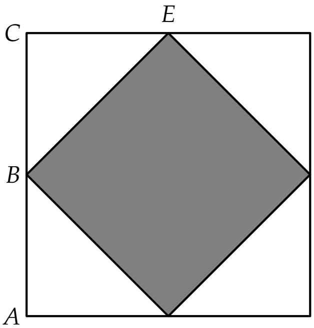
por tanto, Marlene comió más pastel que Juan. □

3. El lado del cuadrado externo mide 10 centímetros:



Los vértices del cuadrado interior (sombreado) están en los puntos medios de los lados del cuadrado externo. **¿Cuál es el área de la región no sombreada?**

*Solución.* El área del cuadrado sombreado es igual al área al área del cuadrado exterior, cuyo lado mide 10 centímetros, disminuido en las cuatro áreas de los triángulos rectángulos no sombreados:




Ahora bien, esos cuatro triángulos tienen la misma área, ya que son congruentes. Y, puesto que los puntos $B$ y $E$ son puntos medios de los respectivos lados, se tiene que cada cateto mide 5 centímetros. Por tanto, el área de cada triángulo es igual a

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

Como el área del cuadrado exterior es igual a

$$10 \cdot 10 = 100$$

centímetros cuadrados, tienes que el área del cuadrado sombreado es igual a

$$100 - 4 \cdot \frac{25}{2} = 100 - 50 = 50$$

centímetros cuadrados. □

4. A mi hermana no le gusta arreglar su cuarto. Por ello, mi papá le ofreció un premio cada vez que ella ponga en orden su habitación. Como ella adora las tarjetas de pókemon, le propuso a mi papá que el primer día que arregle el cuarto, él le premie con 2 tarjetas de pókemon y, a partir de ese día, cada vez que ordene la habitación, él le compre el doble de tarjetas que haya recibido la última vez (así, el segundo día que arregle el cuarto, recibirá 4, el tercero, 8, etcétera). Cada tarjeta tiene un costo de 50 centavos, así que a mi papá le pareció razonable la propuesta de mi hermana; con todo, mi padre le impuso un límite al valor del premio: 80 dólares.

Si el primer día en que mi hermana arregla su cuarto fuese hoy día, sábado 6 de mayo, y lo hiciera todos los días hasta el próximo sábado, 13 de mayo, **¿serán suficientes los** 80 **dólares para premiar a mi hermana?**

*Solución.* Entre el 6 de mayo y el 13 de mayo han transcurrido 8 días. Como la niña empezó su colección con 2 tarjetas, el segundo día recibirá

$$2 \cdot 2 = 2^2 = 4,$$

el tercero

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 = 2^4 = 8;$$

el cuarto, $2^4$, etcétera, hasta que el octavo día recibirá $2^8$; luego, la niña debería recibir

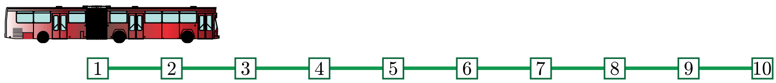
$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 510$$

tarjetas.
Como cada tarjeta tiene un costo de 50 centavos, el dinero necesario para cumplir con el compromiso es

$$0{,}5 \times 510 = 255$$

dólares, 5 más de lo presupuestado. Por tanto, el papá no tendrá dinero suficiente para comprar los premios. □

5. Una línea de la Ecovía pasa por 10 estaciones, como se indica en el gráfico:

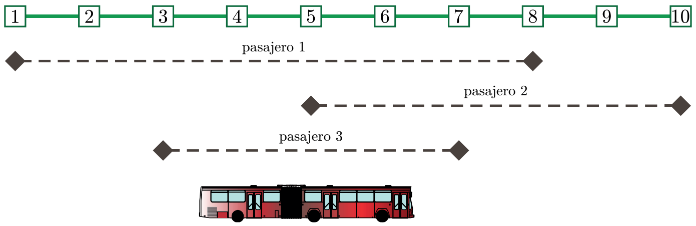



El bus viaja de la estación 1 a la 10, pasando por todas y cada una de las paradas intermedias. El tiempo de viaje entre 2 estaciones consecutivas es siempre de 4 minutos. Andrea, Lucía y Miguel son pasajeros que utilizan esta línea de la Ecovía según la siguiente tabla:

| **Pasajero** | **Origen** | **Destino** |
|---|---|---|
| Andrea | 1 | 8 |
| Lucía | 5 | 10 |
| Miguel | 3 | 7 |

Cierto día, Andrea, Lucía y Miguel estaban en sus paradas de origen en el mismo instante en que Andrea se embarcó en el bus. Lucía y Miguel, a su debido momento, se embarcaron también en el bus en el que iba Andrea. **¿Cuántos minutos estuvieron los tres pasajeros en el bus al mismo tiempo?**

*Solución.* El siguiente dibujo muestra el recorrido que realizan Andrea, Lucía y Miguel aquel día en el que coincidieron en el viaje:




Como puedes apreciar fácilmente, los tres jóvenes comparten el bus desde la estación 5 hasta la estación 7. □

# SEGUNDO NIVEL INFANTIL

## Preguntas y soluciones

1. En una escuela existen 15 paralelos de los distintos niveles y 3 salas de profesores. En cada paralelo, se encuentran matriculados exactamente 12 niños y, en cada sala, siempre se reúnen 5 profesores. Para fomentar la socialización y estimular la cooperación entre estudiantes y maestros, la institución propone la siguiente tarea a cada uno de los estudiantes:

    - Seleccionar el 40 % de los paralelos y entrevistar a $\frac{1}{3}$ de los alumnos de cada uno de estos cursos; y
    - seleccionar los $\frac{2}{3}$ de las salas de profesores y entrevistar al 60 % de los maestros de cada una de dichas salas.

    **¿A cuántas personas debe entrevistar cada estudiante de la escuela para completar su tarea?**

    *Solución.* El número de cursos que deben ser seleccionados es el 40 % de los 15 cursos existentes; es decir, deben seleccionarse

    $$0{,}4 \cdot 15 = 6$$

    cursos.
    Por otra parte, de cada uno de estos paralelos se debe seleccionar a $\frac{1}{3}$ de estudiantes; luego, en cada uno hay 12 estudiantes, se deberán seleccionar

    $$\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

    estudiantes de cada uno de esos 6 cursos; así, se deberán entrevistar a

    $$4 \cdot 6 = 24$$

    estudiantes.
    Por otra parte, los $\frac{2}{3}$ de las 3 salas de profesores es igual a 2 salas de profesores, pues

    $$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

    Y se debe entrevistar al 60 % de los maestros de cada una de esas salas; esto significa que hay que entrevistar a

    $$2 \cdot (0{,}6 \cdot 5) = 6$$

    maestro.

Por tanto, cada estudiante del colegio debe entrevistar a

$$24 + 6 = 30$$

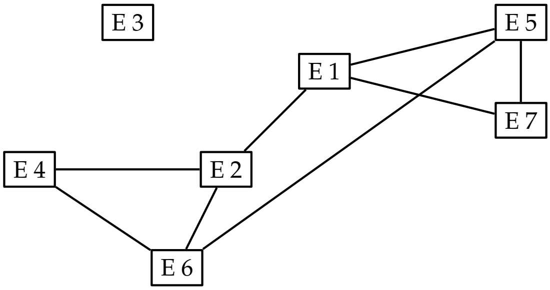
personas. □

2. El profesor de Matemática va a organizar a los 7 estudiantes de su clase en grupos. El número de integrantes de los grupos puede variar entre uno y siete (grupos de 1 estudiante, de 2, etcétera, de 7 estudiantes). Para que el trabajo grupal sea desarrollado exitosamente, el maestro considera que la distancia entre las casas de los miembros de un grupo no debe ser mayor a 1 kilómetro. Bajo las restricciones impuestas por el profesor, **¿cómo deberían conformarse los grupos para que haya el menor número de ellos?**
Las distancias entre los hogares de los estudiantes viene dada en la siguiente tabla:

| | E 1 | E 2 | E 3 | E 4 | E 5 | E 6 | E 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E 1 | – | 0,9 | 2,4 | 3,9 | 0,5 | 1,5 | 0.7 |
| E 2 | 0.9 | – | 4,5 | 0,8 | 1,5 | 0.4 | 1,5 |
| E 3 | 2.4 | 4.5 | – | 4,4 | 2,1 | 3,5 | 2.8 |
| E 4 | 3.9 | 0.8 | 4.4 | – | 3,5 | 0.3 | 1,5 |
| E 5 | 0.5 | 1.5 | 2.1 | 3.5 | – | 0,8 | 0.7 |
| E 6 | 1.5 | 0.4 | 3.5 | 0.3 | 0.8 | – | 1,5 |
| E 7 | 0.7 | 1.5 | 2.8 | 1.5 | 0.7 | 1,5 | – |

Por ejemplo, la distancia entre la casa del estudiante 1 y la del estudiante 2 es 0,9 kilómetros; y la distancia entre las casas de los estudiante 3 y 4 es de 4,4 kilómetros.

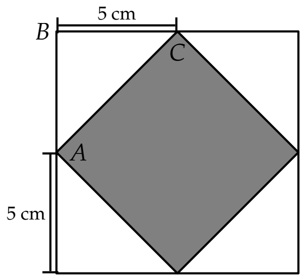
*Solución.* En primer lugar, vamos a identificar los pares de estudiantes cuyas viviendas no están separadas por más de un kilómetro. Para ello, dibujamos en un plano rectángulos que representan las casas de cada estudiante y conectamos aquellos rectángulos mediante una línea recta siempre que la distancia entre las viviendas es menor que un kilómetro:




Los miembros de un grupo deben estar conectados todos entre sí. Luego, está claro que pueden haber varias maneras de formar los grupos. Por ejemplo, se pueden organizar 7 grupos de un solo estudiante. O también podrían constituirse cinco grupos: el formado únicamente por el estudiante 1, otro por el estudiante 5, otro por el estudiante 7 y uno más formado por los estudiantes 2, 4 y 6.
Sin embargo, del gráfico podemos ver que el número mínimo de grupos es 3: el primero formado por los estudiantes 1, 5 y 7; el segundo formado por los estudiantes 2, 4 y 6 forman un segundo grupo; y, finalmente, un tercer grupo constituido por el estudiante 3 únicamente. □

3. En un cuadrado cuyo lado mide 10 centímetros se inscribe otro cuadrado cuyos vértices son los puntos medios del primer cuadrado. **Dibuja los dos cuadrados y determina la diferencia (en centímetros cuadrados) entre las áreas de los dos cuadrados**.

   *Solución.* En primer lugar, el siguiente es un dibujo de los dos cuadrados:




El área $A_1$ del primer cuadro (del que mide 10 centímetros) es:

$$A_1 = 10 \times 10 = 100$$

centímetros cuadrados.
Ahora bien, el lado del cuadro interno (el sombreado) es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ cuyos catetos miden 5 centímetros cada uno:

$$AC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

centímetros.
Luego, el área del cuadro interno (sombreado) es:

$$A_2 = AC^2 = \sqrt{50} \times \sqrt{50} = 50$$

centímetros cuadrados.
Así, la diferencia entre ambas áreas es

$$A_1 - A_2 = 50$$

centímetros cuadrados. □

4. Por su cumpleaños, Juan Manuel recibe una bolsa con 1 000 chocolates; el color de la envoltura de un chocolate puede ser de uno de los siguientes colores: blanco, amarillo, rojo, verde o café. De los 1 000 chocolates, 201 chocolates están envueltos en papel de color blanco; 198 tienen envoltura de color amarillo; 204 tienen envoltura de color rojo; 187 envoltura de color verde y 210 envoltura de color café.
   Para comérselos, Juan Manuel se impone la siguiente regla: escoge al azar tres chocolates de la bolsa; si los tres son del mismo color, se los come; si no, los regresa a la bolsa. Juan Manuel aplicó su regla hasta que sólo le quedó un chocolate en la bolsa. **¿De qué color era su envoltura?**

   *Solución.* Observemos que los números 201, 198, 204 y 210, que indican las cantidades de chocolates de color blanco, amarillo, rojo y café, respectivamente, son número múltiplos de 3; en cambio el número de unidades envueltas en papel de color verde es 187, que no es múltiplo de 3. Esto quiere decir, siempre que salen

tres chocolates de un mismo color, uno de esos colores siempre debe ser o blanco, amarillo, rojo o café, pero en algunas ocasiones podría no ser de color verde.
Ahora bien, como

$$187 = 62 \times 3 + 1,$$

luego de sacar 62 veces grupos de tres chocolates verdes, quedará uno. Así, el último chocolate que Juan Manuel disfrutó estaba envuelto en papel verde. $\square$

5. Observa las siguientes restas:

$$\begin{gathered} 100 - 99 = 1 \\ 1\,000 - 99 = 901 \\ 10\,000 - 99 = 9\,901 \\ \dots \end{gathered}$$

**¿A qué es igual** $10^{10} - 99$**?**

*Solución.* En primer lugar, reescribe esta secuencia utilizando la notación exponencial para los múltiplos de 10:

$$\begin{gathered} 10^2 - 99 = 1 \\ 10^3 - 99 = 901 \\ 10^4 - 99 = 9\,901 \\ \dots \end{gathered}$$

Ahora, si "das un paso más en la secuencia", la cuarta igualdad es

$$10^5 - 99 = 99\,901.$$

Luego, parece ser que el patrón que tiene la secuencia es el siguiente: el último dígito del número es 1, el penúltimo, 0 y los demás son números nueves. ¿Cuántos? Podemos ver que la relación entre el exponente y el número de nueves en el resultado de la operación es:

| exponente | número de nueves en la respuesta |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |

Es decir, hay dos números nueves más en el exponente que en el resultado de las operaciones. Luego, concluimos que

$$10^{10} - 99 = \overbrace{9\,999\,999\,9}^{8 \text{ veces}}01. \qquad \square$$

# Primer Nivel Juvenil

## Preguntas y soluciones

1. El número 26 es uno que puede expresarse como la suma de cuatro números enteros consecutivos:

$$26 = 5 + 6 + 7 + 8;$$

otro número que tiene esta propiedad es el 406:

$$406 = 100 + 101 + 102 + 103.$$

**¿Cuál es el número entero más grande menor que** 2017 **que se puede expresar como una suma de cuatro números enteros consecutivos?**

*Solución.* Si $n$ representa el número más pequeño de los cuatro buscados, los otros tres se representarán por

$$n + 1, \quad n + 2 \quad \text{y} \quad n + 3.$$

Por tanto, tenemos que

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$$

debe ser el entero más grande posible menor que 2 017; así deberá verificarse la desigualdad

$$4n + 6 \leq 2\,017,$$

de donde

$$\begin{aligned} n &= \left\lfloor \frac{2\,017 - 6}{4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2\,011}{4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 502 + \frac{3}{4} \right\rfloor \\ &= 502. \end{aligned}$$

Observa que

$$502 + 503 + 504 + 505 = 2\,014 \quad \text{y} \quad 503 + 504 + 505 + 506 = 2\,018.$$

Entonces, el número más pequeño, pero menor a 2 017, que puede expresarse como la suma de cuatro enteros consecutivos es el 2 014. □

2. Edgardo leyó un libro en 21 días. Lo leyó de una manera inusual: el primer día leyó tres páginas y, cada día siguiente, leyó dos páginas más que el día anterior. **¿Cuántas páginas tiene el libro?**

   *Solución.* Los cuatro primeros días Edgardo leyó

   $$3, \quad 3+2, \quad 3+2+2 = 3+2\times 2, \quad 3+2+2+2 = 3+3\times 2$$

   páginas, respectivamente. Por tanto, el último día, el 21, Edgardo leyó

   $$3+20\times 2$$

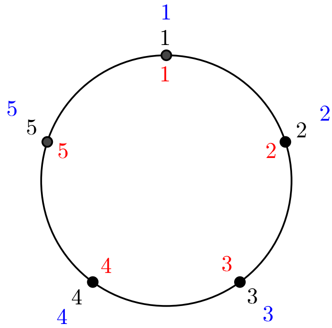
   páginas y, en total, en ese período, leyó

   $$\begin{aligned}\overbrace{3+(3+2)+(3+2\times 2)\ +\ldots+\ (3+20\times 2)}^{21\text{ veces}} &= 21\times 3+(2+2\times 2+\ldots+19\times 2+20\times 2)\\ &= 63+(1+2+3+\ldots+19+20)\times 2\\ &= 63+\frac{20\times 21}{2}\times 2\\ &= 63+20\times 21\\ &= 483\end{aligned}$$

   páginas en esos 21 días. □

3. Para fabricar una pulsera de mullos, utilizamos una cuerda delgada que atraviese los mullos y luego la cerramos atando sus extremos entre sí. Si tuvieras cinco mullos de colores diferentes y los usaras todos para elaborar una pulsera, **¿cuántas pulseras distintas podrías armar?**

   *Solución.* Nombremos con los números 1 2, 3, 4 y 5 los cinco colores de mullos. Aunque en un arreglo circular no hay (en principio) un "inicio", asumamos por un momento que empezamos con un mullo de color 1. Para colocar los otros cuatro mullos, tenemos 4! posibles arreglos diferentes. Ahora bien, los arreglos lineales 12345 y 15432 representan el mismo arreglo circular (o, dicho en términos de pulseras, representan la misma pulsera), como puedes ver en el siguiente dibujo:

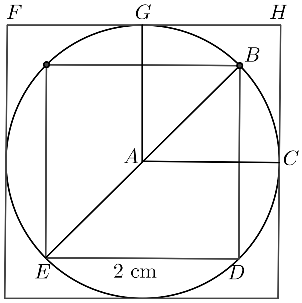



   Es decir, por cada arreglos lineales de los cuatro mullos restantes, siempre hay dos que representan la misma pulsera; luego, el número total de arreglos para armar la pulsera es

   $$\frac{4!}{2} = 12.$$ □

4. Considera un cuadrado inscrito en un círculo que, a su vez, también está inscrito en otro cuadrado. **¿Cuál es el área del cuadrado más grande sabiendo que el lado del cuadrado más pequeño mide 2 centímetros?**

   *Solución.* Observa el gráfico de los dos cuadrados y el círculo:




   Para calcular el área del cuadrado más grande, requerimos determinar la medida del lado $\overline{FH}$. Ahora bien, observemos que la medida de dicho lado es el doble de la medida del segmento $\overline{AC}$, cuya medida es igual a la del radio $\overline{AB}$. Esta medida es, a su vez, la mitad de la diagonal del cuadrado más pequeño. En resumen, el lado del cuadrado más grande mide lo mismo que la diagonal del cuadrado más pequeño, y esta diagonal (por el teorema de Pitágoras) mide

$$EB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

   centímetros. Luego,

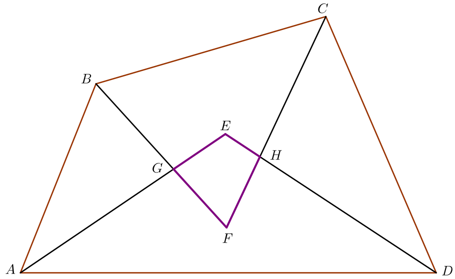
$$FH = 2\sqrt{2}$$

   y, por tanto, el área del cuadrado más grande es

$$FH^2 = 4 \times 2 = 8$$

   centímetros cuadrados. □

5. Considera el cuadrilátero $ABCD$:




   Los segmentos de rectas $\overline{BG}$, $\overline{AG}$, $\overline{CH}$ y $\overline{DH}$ bisecan los ángulos correspondientes a los vértices $B$, $A$, $C$ y $D$. Estas bisectrices forman el cuadrilátero $GEHF$. **¿Cuál es el valor de la suma de las medidas de los ángulos internos $\angle E$ y $\angle F$ del cuadrilátero $GEHF$?**

   *Solución.* En el cuadrilátero $ABCD$, la suma de las medidas de los ángulos internos (cuyos vértices son $A$, $B$, $C$ y $D$) es igual a 360. Al bisecarlos mediante los segmentos

$\overline{BG}$, $\overline{AG}$, $\overline{CH}$ y $\overline{DH}$, tenemos que

$$\text{m } \angle BAG + \text{m } ABG + \text{m } DCH + \text{m } CDH = 180.$$

Por otra parte, la suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos $\triangle ABG$ y $\triangle CDH$ es igual a 180, respectivamente:

$$\text{m } \angle BAG + \text{m } ABG + \text{m } \angle G = 180 \quad \text{y} \quad \text{m } \angle DCH + \text{m } CDH + \text{m } \angle H = 180.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(\text{m } \angle BAG + \text{m } ABG + \text{m } \angle G) + (\text{m } \angle DCH + \text{m } CDH + \text{m } \angle H) &= \\ 180 + (\text{m } \angle G + \text{m } \angle H) &= 360;\end{aligned}$$

es decir,

$$180 + (\text{m } \angle G + \text{m } \angle H) = 360,$$

de donde la suma de los otros dos ángulos internos del cuadrilátero GEHF es igual a $180^\circ$. $\square$

# Segundo Nivel Juvenil

## Preguntas y soluciones

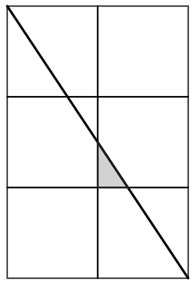
1. El matemático Augustus De Morgan vivió en el siglo XIX. En cierta ocasión afirmó:

   *Yo tenía $x$ años en el año $x^2$.*

   **¿En qué año nació De Morgan?**

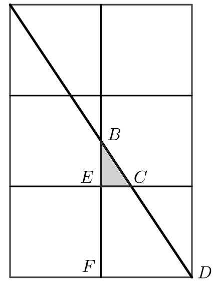
   *Solución.* Sabiendo que los años del siglo XIX están entre el 1801 y el 1900, tenemos que buscar un número natural $x$ cuyo cuadrado esté en ese intervalo. El único número que cumple con esa propiedad es el 43. Por tanto De Morgan tenía 43 años en el 1849, habiendo nacido en el 1806. □

2. El lado de cada uno de los seis cuadrados mide 5 centímetros:

   **¿Cuál es el área del triángulo sombreado?**

   *Solución.* El triángulo $\triangle BCE$ es rectángulo y la diagonal $\overline{AD}$ corta el lado vertical del cuadrado en el medio; entonces el lado vertical $\overline{BE}$ mide 2,5 centímetros:

Para calcular la longitud del lado horizontal $\overline{EC}$, observemos que los triángulos $\triangle BCE$ y $\triangle BDF$ son semejantes; por tanto,

$$\frac{CE}{DF} = \frac{EB}{FB},$$

de donde

$$\frac{CE}{5} = \frac{2{,}5}{7{,}5}.$$

Luego, $CE = \frac{5}{3}$ y el área del triángulo es

$$\frac{1}{2} \times 2{,}5 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

centímetros cuadrados. □

3. Sabiendo que $X + Y = 1$ y $X^2 + Y^2 = 2$, **¿cúal es el valor de** $X^3 + Y^3$**?**

*Solución.* En primer lugar, tenemos que

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 = 1^2.$$

Ya que $X^2 + Y^2 = 2$, podemos deducir que

$$XY = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}.$$

En segundo lugar, también sabemos que

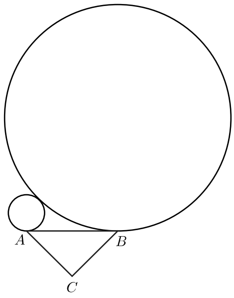
$$(X+Y)(X^2+Y^2) = X^3 + Y^3 + X^2Y + XY^2,$$

luego

$$\begin{aligned} X^3 + Y^3 &= (X+Y)(X^2+Y^2) - XY(X+Y) \\ &= 1 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

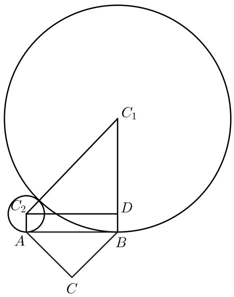
□

4. En la figura




el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles, donde el ángulo recto es $\angle C$; los dos círculos, de radios $r_1$ y $r_2$ respectivamente, son tangentes entre sí y tangentes al segmento de recta $\overline{AB}$. **¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$ en función de $r_1$ y $r_2$?**

*Solución.* Observa el dibujo:




En el triángulo rectángulo isóceles $\triangle ABC$, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2.$$

Así, el área del triángulo es

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{AB^2}{4}.$$

Para calcular la longitud AB, consideramos el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C_2$ y el triángulo rectángulo $\triangle C_1DC_2$. La longitud del lado $\overline{C_2D}$ es igual a AB, la longitud del lado $\overline{C_1C_2}$ es igual a la suma de los radios $r_1 + r_2$ y la longitud del lado $C_1D$ es igual a $r_1 - r_2$, ya que los círculos son tangentes y, por tanto, los puntos son colineales.
Por tanto, por eel teorema de Pitágoras, obtenemos

$$\begin{aligned} AB^2 &= C_2C_1^2 - C_1D^2 \\ &= (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \\ &= 4r_1r_2. \end{aligned}$$

Entonces el área del triángulo es $\frac{AB^2}{4} = r_1r_2$. □

5. Demuestre que en cualquier conjunto de siete números naturales que son cuadrados perfectos, hay al menos dos cuya diferencia es divisible por diez.

*Solución.* En primer lugar, observemos que al último dígito (el del extremo derecho) es uno de los seis dígitos 0, 1, 4, 5, 6 y 9; luego, al haber siete cuadrados perfectos, dos de ellos tendrán igual el último dígito. Así, el último dígito de la diferencia entre estos dos números es 0 y, por tanto, divisible por diez. □

# TERCER NIVEL JUVENIL

## Preguntas y soluciones

1. Demuestra que para cualquier número positivo $x$, se cumple que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

*Solución.* Para todo $x > 0$, se verifican las siguientes equivalencias lógicas:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 \;&\equiv\; \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \\ &\equiv\; x^2 + 1 \geq 2x \\ &\equiv\; x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\equiv\; (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y la desigualdad

$$(x-1)^2 \geq 0$$

es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces también lo es la desigualdad

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

para todo $x > 0$. □

2. Demuestra que si $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $abcd = 1$, entonces

$$a(b+1) + d(c+1) \geq ad + 3.$$

*Solución.* En primer lugar, puesto que

$$abcd = 1,$$

tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$\begin{aligned} a(b+1) + d(c+1) \geq ad + 3 \;&\equiv\; ab + dc + a + d \geq ad + 3 \\ &\equiv\; ab + \frac{1}{ab} + a + d \geq ad + 3 \\ &\equiv\; 2 + a + d \geq ad + 3 \\ &\equiv\; a + d \geq ad + 1, \end{aligned}$$

pues, dado que $ab > 0$, por el ejercicio anterior sabemos que

$$ab + \frac{1}{ab} \geq 2.$$

Luego, para probar la desigualdad propuesta, nos faltaría mostrar la desigualdad

$$a + d \geq ad + 1.$$

Para esto, observemos que

$$\begin{aligned} a + d \geq ad + 1 &\equiv (a - ad) + (d - 1) \geq 0 \\ &\equiv a(1 - d) - (1 - d) \geq 0 \\ &\equiv (a - 1)(1 - d) \geq 0 \end{aligned}$$

y que

$$a \geq 1 \quad \text{y} \quad d \leq 1$$

porque

$$a \geq b \geq c \geq d \quad \text{y} \quad abcd = 1.$$

Por tanto,

$$(a - 1)(a - d) \geq 0$$

es verdadera y, con esto, sabemos que

$$a + d \geq ad + 1$$

también lo es. □

3. Si $\alpha$ y $\beta$ son dos soluciones distintas de la ecuación

$$(x + 10)(x + 1) + (x + 10)(x - 1) + (x + 1)(x - 1) = 0, \tag{.1}$$

halla el valor de

$$\frac{1}{(\alpha + 2017)(\beta + 2017)} + \frac{1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} + \frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}. \tag{.2}$$

*Solución.* Notemos en primer lugar que tanto $\alpha$ como $\beta$ son diferentes de 1, $-1$ y $-10$. Entonces, dividiendo (.1) por

$$(x + 1)(x - 1)(x + 10),$$

y evaluando la expresión resultante en $\alpha$ y $\beta$, obtenemos

$$\frac{1}{\alpha + 10} + \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha - 1} = 0 \tag{.3}$$

y

$$\frac{1}{\beta + 10} + \frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{\beta - 1} = 0 \tag{.4}$$

Además, mediante fracciones parciales, tenemos que si

$$f(x) = \frac{1}{(x + \alpha)(x + \beta)},$$

entonces

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\beta - \alpha}}{x + \alpha} + \frac{\frac{1}{\alpha - \beta}}{x + \beta}.$$

Entonces (.2) es equivalente a

$$\begin{aligned} f(1) + f(-1) + f(-10) &= \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha + 10}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{\beta - 1} + \frac{1}{\beta + 10}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Una solución alternativa es la siguiente: si expandemos (.1), obtenemos que

$$3x^2 + 20x - 1 = 0.$$

Como $\alpha$ y $\beta$ son las raíces, tenemos que

$$g(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) = 3x^2 + 20x - 1.$$

Por tanto, (.2) es igual a

$$\begin{aligned} \frac{3}{g(1)} + \frac{3}{g(-1)} + \frac{3}{g(-10)} &= \frac{3}{22} - \frac{3}{18} + \frac{3}{99} \\ &= \frac{27 - 33}{2(99)} + \frac{3}{99} \\ &= -\frac{3}{99} + \frac{3}{99} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4. Si

$$A_{n,m} = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{n - m},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!},$$

demuestra que, si se fija $n$, la sucesión

$$A_{n,n},\ A_{n,n+1},\ A_{n,n+2},\ \ldots$$

tiene un único máximo en $m = 2n^2 - 1$.

*Solución.* En realidad, es posible demostrar algo más que lo pedido; a saber, que las siguientes cadenas de desigualdades se verifican:

$$A_{n,n} < A_{n,n+1} < A_{n,n+2} < \cdots < A_{n,2n^2-1} > A_{n,2n^2} > A_{n,2n^2+1} > \cdots$$

En efecto, consideremos el cociente

$$\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m + 1)(m + 1)}{(m + n + 1)(m - n + 1)}.$$

No es difícil cerciorarse de que

$$\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} > 1$$

siempre que

$$m < 2n^2 - 1$$

y que

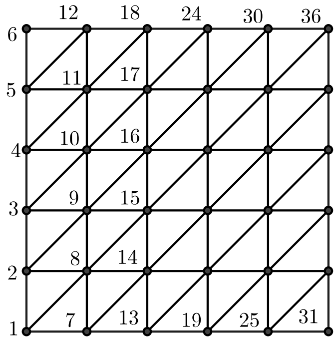
$$\frac{A_{n,m+1}}{A_{n,m}} < 1$$

si

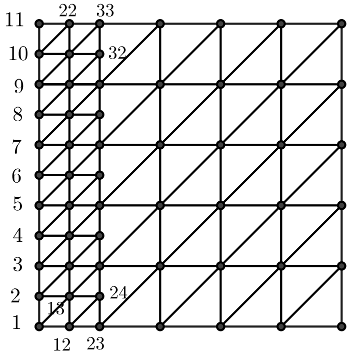
$$m > 2n^2 - 1.$$

Luego, las cadenas de desigualdades son válidas.
Finalmente, en particular, el máximo se obtiene, justamente en $m = 2n^2 - 1$. □

5. Gonzalo tiene un cuadrado mágico cuyos nodos (puntos) están numerados del 1 al 36:

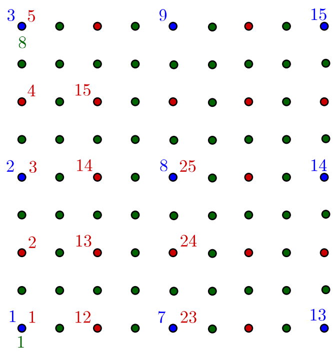



Si cada día el número de nodos del cuadrado crece dividiendo cada uno de sus triángulos en 4 nuevos triángulos, como se muestra en el gráfico:




**¿Qué número tendría el nodo** 15 **del cuadrado del primer día al cabo de tres días?**

*Solución.* El siguiente dibujo muestra el incremento de nodos al cabo de los tres días en el cuadrado de vértices 1, 3, 15 y 13:




Los nodos de color azul son los que habían el primer día; los de color rojo, el segundo día; y los de color verde, los del tercer día.
Como puedes observar, el nodo 15 del primer día, está en la columna nueve al cabo del tercer día y, su posición en esta columna (desde abajo) es la novena. Así que para averiguar qué número de nodo es, solo vamos a contar el total de todos que hay en las primeras ocho columnas.
Para ello, observa que hay siempre 3 nodos entre cada uno de los nodos originales: hay tres entre el 1 y el 2; entre el 2 y el 2, etcétera, y hay cinco pares de números consecutivos. Esto significa que, cada columna deben haber

$$5 \times 3 + 6 = 21$$

nodos (el término 6 se debe a los seis nodos originales). Luego, en las primeras ocho columnas hay

$$8 \times 21 = 168$$

nodos. Finalmente, como el nodo 15 ocupa la novena posición en la novena columna, el total de nodos hasta el original 15 es

$$168 + 9 = 177. \qquad \square$$